

## Résolution de l'équation du troisième degré (première partie)

Le but de l'activité est d'étudier une méthode de résolution des équations du troisième degré du type  $x^3 + px + q = 0$ .

### Méthode générale

On considère deux nombres  $u$  et  $v$  vérifiant les relations suivantes :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

1. Montrer que  $u + v$  est solution de l'équation  $x^3 + px + q = 0$ .
2. Montrer par substitution que  $u^3$  et  $v^3$  sont solutions de l'équation  $X - \frac{p^3}{27} \frac{1}{X} = -q$ .
3. En déduire que  $u^3$  et  $v^3$  sont solutions de l'équation du deuxième degré  $X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$ .

### Mise en oeuvre de la méthode sur un exemple

On considère l'équation  $x^3 + 6x - 7 = 0$  et on cherche une solution sous la forme  $u + v$  selon la méthode précédente.

1. Déterminer l'équation du deuxième degré vérifiée par  $u^3$  et  $v^3$ .
2. En déduire les valeurs de  $u$  et  $v$ .
3. En déduire une solution de l'équation  $x^3 + 6x - 7 = 0$ . Existe-t-il une autre solution dans  $\mathbb{R}$  ?

### Application

Résoudre les équations du troisième degré suivantes :

$$\begin{aligned} x^3 - 18x - 35 &= 0 \\ x^3 + 6x - 2 &= 0 \\ x^3 + 3x^2 + 9x + 9 &= 0 \quad (\text{utiliser le changement de variable } x = y - 1) \end{aligned}$$