Résolution de l'équation du troisième degré (deuxième partie)

On considère l'équation du troisième degré $x^3 + px + q = 0$. On rappelle que si u et v sont deux réels dont les cubes sont solutions de l'équation du deuxième degré $X^2 + qX - \dfrac{p^3}{27} = 0$ alors le réel $x = u + v$ est une solution de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

Mise en évidence d'une difficulté et présentation d'une solution

On considère l'équation du troisième degré $x^3 - 15x - 4 = 0$.

1. Montrer que la méthode ci-dessus ne permet pas de déterminer une solution de l'équation.
2. On définit un nombre "imaginaire" que l'on note i et qui vérifie la relation $i^2 = -1$. Montrer que les nombres $z_1 = 2 + 11i$ et $z_2 = 2 - 11i$ sont solutions de l'équation $X^2 - 4X + 125$.
3. On pose $u = 2 + i$ et $v = 2 - i$.
   (a) Prouver que $u^3 = z_1$.
   (b) Prouver que $v^3 = z_2$.
4. En déduire une solution de l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$.
5. Déterminer deux nombres α et β tels que $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + \alpha x + \beta)$. En déduire toutes les solutions de l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$.

Résolution de l'équation du deuxième degré dans le cas d'un discriminant négatif

On considère l'équation du deuxième degré $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ avec $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

1. Montrer que $x = m + ni$ avec $i^2 = -1$ est solution de l'équation si :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} m & = & -\dfrac{b}{2a} \\ n^2 & = & -\dfrac{\Delta}{4a^2} \end{array} \right.$$

2. En déduire la forme générale des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, $\Delta < 0$.
3. Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} x^2 - 6x + 13 & = & 0 \\ x^2 - 2x + 3 & = & 0 \\ x^2 + x + 1 & = & 0 \\ 3x^2 - 2x + 2 & = & 0 \end{array}$$