Nombres complexes et géométrie

1 Interprétation géométrique des nombres complexes

Définitions

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on peut définir :

L'*affixe* d'un point $M(x;y)$ par le nombre complexe $z_M = x + iy$.

L'*affixe* d'un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par le nombre complexe $z_{\overrightarrow{u}} = x + iy$.

Propriétés

Prouver les résultats suivants :

1. Si $k \in \mathbb{R}$ alors $z_{k\overrightarrow{u}} = kz_{\overrightarrow{u}}$.
2. $z_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = z_{\overrightarrow{u}} + z_{\overrightarrow{v}}$.
3. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
4. Si $G = bar(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)$ alors $z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$.

2 Application : Droite d'Euler d'un triangle

Le but de cette partie est de démontrer que le centre O du cercle circonscrit, le centre de gravité G et l'orthocentre H d'un triangle ABC quelconque sont alignés et que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

1. Faire une figure, construire également les points I, J et K symétriques respectifs du point O par rapport aux droites (BC), (AC) et (AB).

Le plan est désormais muni d'un repère orthonormé d'origine O.

2. Prouver que $z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$.
3. Prouver que les quadrilatères $OBIC$, $OAJC$ et $OAKB$ sont des losanges donc des parallélogrammes, en déduire que $z_I = z_B + z_C$, $z_J = z_A + z_C$ et $z_K = z_A + z_B$.
4. On considère le point P tel que $z_P = z_A + z_B + z_C$, prouver que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OK}$. En déduire que $P = H$.
5. Prouver que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.