

Nombres complexes (première partie)

1 Définition des nombres complexes

Théorème 1. *Il existe un ensemble \mathbb{C} des nombres complexes qui possède les propriétés suivantes :*

- \mathbb{C} contient \mathbb{R} .
- \mathbb{C} est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans \mathbb{R} .
- \mathbb{C} contient un nombre noté i tel que $i^2 = -1$.
- tout nombre complexe z admet une unique écriture sous la forme $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, cette écriture est appelée forme algébrique du nombre z , le réel a est la partie réelle du nombre z notée $\operatorname{Re}(z)$ et réel b est la partie imaginaire du nombre z notée $\operatorname{Im}(z)$. Si $b = 0$ le nombre z est dit réel et si $a = 0$ le nombre z est dit imaginaire pur.

Démonstration. admis. □

Exemple 1. Calcul de la forme algébrique de $(1 + 7i) + (1 + 3i)(1 - 5i)$.

Propriété 1. *Tout nombre complexe $z = a + ib$ admet un unique opposé z' tel que $z + z' = 0$, on le note $z' = -z$ et on a $-z = (-a) + i(-b)$.*

Démonstration. au programme. □

Définition 1. *On définit la différence de deux nombres complexes z et z' par $z - z' = z + (-z')$.*

Propriété 2. *Tout nombre complexe $z = a + ib$ non nul admet un unique inverse z' tel que $z \times z' = 1$, on le note $z' = \frac{1}{z}$ et on a $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2}$.*

Démonstration. au programme. □

Exemple 2. Calcul de la forme algébrique de $\frac{1}{2 + 3i}$.

Définition 2. *On définit le quotient de deux nombres complexes z et z' par $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$.*

Exemple 3. Calcul de la forme algébrique de $\frac{1 + 2i}{1 + 3i}$.

2 Résolution dans \mathbb{C} de l'équation du second degré à coefficients réels

Théorème 2. *L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b, c trois réels et $a \neq 0$ admet :*

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, deux solutions réelles distinctes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et on a $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$, une solution réelle double $x_0 = \frac{-b}{2a}$ et on a $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et on a $ax^2 + bx + c = a(x - z_1)(x - z_2)$.

Démonstration. au programme. □

3 Conjugué et Module d'un nombre complexe

Définition 3. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, on appelle nombre complexe conjugué de z le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.

Propriété 3. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ on a :

1. $\overline{-z} = -\bar{z}$
2. pour $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$
3. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
4. $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z}'$
5. $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$
6. pour $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$
7. $\overline{\bar{z}} = z$
8. z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$.
9. z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$.

Démonstration. au programme. □

Définition 4. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, on appelle module de z le réel $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Propriété 4. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ on a :

1. $z\bar{z} = |z|^2$
2. $|\bar{z}| = |z|$
3. $|-z| = |z|$
4. $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$
5. pour $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
6. $|zz'| = |z||z'|$
7. pour $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
8. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Démonstration. au programme. □