

# Nombres complexes (première partie)

## 1 Définition des nombres complexes

**Théorème 1.** *Il existe un ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes qui possède les propriétés suivantes :*

- $\mathbb{C}$  contient  $\mathbb{R}$ .
- $\mathbb{C}$  est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans  $\mathbb{R}$ .
- $\mathbb{C}$  contient un nombre noté  $i$  tel que  $i^2 = -1$ .
- tout nombre complexe  $z$  admet une unique écriture sous la forme  $z = a + ib$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ , cette écriture est appelée forme algébrique du nombre  $z$ , le réel  $a$  est la partie réelle du nombre  $z$  notée  $\operatorname{Re}(z)$  et réel  $b$  est la partie imaginaire du nombre  $z$  notée  $\operatorname{Im}(z)$ . Si  $b = 0$  le nombre  $z$  est dit réel et si  $a = 0$  le nombre  $z$  est dit imaginaire pur.

*Démonstration.* admis. □

**Exemple 1.** *Calcul de la forme algébrique de  $(1 + 7i) + (1 + 3i)(1 - 5i)$ .*

**Propriété 1.** *Tout nombre complexe  $z = a + ib$  admet un unique opposé  $z'$  tel que  $z + z' = 0$ , on le note  $z' = -z$  et on a  $-z = (-a) + i(-b)$ .*

*Démonstration.* au programme. □

**Définition 1.** *On définit la différence de deux nombres complexes  $z$  et  $z'$  par  $z - z' = z + (-z')$ .*

**Propriété 2.** *Tout nombre complexe  $z = a + ib$  non nul admet un unique inverse  $z'$  tel que  $z \times z' = 1$ , on le note  $z' = \frac{1}{z}$  et on a  $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2}$ .*

*Démonstration.* au programme. □

**Exemple 2.** *Calcul de la forme algébrique de  $\frac{1}{2 + 3i}$ .*

**Définition 2.** *On définit le quotient de deux nombres complexes  $z$  et  $z'$  par  $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$ .*

**Exemple 3.** *Calcul de la forme algébrique de  $\frac{1 + 2i}{1 + 3i}$ .*

## 2 Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré à coefficients réels

**Théorème 2.** *L'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  avec  $a, b, c$  trois réels et  $a \neq 0$  admet :*

- Si  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ , deux solutions réelles distinctes  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  et on a  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ .
- Si  $\Delta = 0$ , une solution réelle double  $x_0 = \frac{-b}{2a}$  et on a  $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ .
- Si  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ , deux solutions complexes conjuguées  $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$  et on a  $ax^2 + bx + c = a(x - z_1)(x - z_2)$ .

*Démonstration.* au programme. □

### 3 Conjugué et Module d'un nombre complexe

**Définition 3.** Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe, on appelle nombre complexe conjugué de  $z$  le nombre complexe  $\bar{z} = a - ib$ .

**Propriété 3.** Soient  $z, z' \in \mathbb{C}$  on a :

1.  $\overline{-z} = -\bar{z}$
2. pour  $z \neq 0$ ,  $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$
3.  $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
4.  $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z}'$
5.  $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$
6. pour  $z' \neq 0$ ,  $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$
7.  $\overline{\bar{z}} = z$
8.  $z$  est réel si et seulement si  $\bar{z} = z$ .
9.  $z$  est imaginaire pur si et seulement si  $\bar{z} = -z$ .

*Démonstration.* au programme. □

**Définition 4.** Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe, on appelle module de  $z$  le réel  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

**Propriété 4.** Soient  $z, z' \in \mathbb{C}$  on a :

1.  $z\bar{z} = |z|^2$
2.  $|\bar{z}| = |z|$
3.  $|-z| = |z|$
4.  $|z| = 0$  si et seulement si  $z = 0$
5. pour  $z \neq 0$ ,  $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
6.  $|zz'| = |z||z'|$
7. pour  $z' \neq 0$ ,  $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
8.  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

*Démonstration.* au programme. □