

Devoir de Mathématiques

Exercice 1

On considère le polynôme :

$$P(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$$

où z désigne un nombre complexe.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z , on ait :

$$P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$$

2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 2

Déterminer les réels a et b tels que la fonction $f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 1}$ soit une solution de l'équation différentielle :

$$[f(x)]^2 + f'(x) = \frac{5}{(x^2 + 1)^2}$$

Exercice 3

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 1}$$

On appelle \mathcal{C}_1 sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(0, \vec{i}, \vec{j})$ avec pour unités 4 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée.

1. (a) Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
(b) Étudier les variations de la fonction f
2. On considère la fonction g définie par $g(x) = x^2 + 1$ et on appelle \mathcal{C}_2 sa courbe représentative dans le repère orthogonal défini précédemment.
(a) Étudier la limite de $f(x) - g(x)$ en $+\infty$ et $-\infty$.
(b) Étudier la position de \mathcal{C}_1 par rapport à \mathcal{C}_2 .
3. Représenter graphiquement \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .