# Correction du devoir de Mathématiques

## Exercice 1

1. On a :

$$(z^2+az+b)(z^2+4z+2a) = z^4+4z^3+2az^2+az^3+4az^2+2a^2z+bz^2+4bz+2ab = z^4+(a+4)z^3+(6a+b)z^2+(2a^2+4b)z+2ab$$

d'où par identification :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+4 & = & 0 \\ 6a+b & = & -19 \\ 2a^2+4b & = & 52 \\ 2ab & = & -40 \end{array}\right.$$

On en déduit $a=-4$ et $b=5$ soit $P(z)=(z^2-4z+5)(z^2+4z-8)$.

2. On obtient l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$ à partir des racines des trinômes $z^2-4z+5$ et $z^2+4z-8$ soit $S=\{2-i, 2+i, -2-2\sqrt{3}, -2+2\sqrt{3}\}$.

## Exercice 2

La fonction $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x)=\frac{a(x^2+1)-2x(ax+b)}{(x^2+1)^2}=\frac{-ax^2-2bx+a}{(x^2+1)^2}$$

de plus :

$$[f(x)]^2=\frac{(ax+b)^2}{(x^2+1)^2}=\frac{a^2x^2+2abx+b^2}{(x^2+1)^2}$$

La fonction $f$ est une solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2-a & = & 0 \\ 2ab-2b & = & 0 \\ b^2+a & = & 5 \end{array}\right.$$

On a $a=1$ et $b=\pm 2$ d'où deux solutions $f_1(x)=\dfrac{x+2}{x^2+1}$ et $f_2(x)=\dfrac{x-2}{x^2+1}$.

## Exercice 3

1. (a) la fonction $f$ est définie sur $\mathcal{D}_f=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ et :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \quad \lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=+\infty \quad \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=-\infty \quad \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty \quad \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

(b) La fonction $f$ est dérivable sur chacun des intervalles de son ensemble de définition et :

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2-1) - 2x \times x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3(x^2-2)}{(x^2-1)^2}$$

on en déduit les variations de la fonction $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{2}$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| | $+\infty$ | | | $+\infty$ | ‖ | | $0$ | | ‖ $+\infty$ | | | | $+\infty$ |
| $f(x)$ | | ↘ | | ↗ | ‖ | ↗ | | ↘ | ‖ | ↘ | | ↗ | |
| | | | $4$ | | ‖ $-\infty$ | | | $-\infty$ ‖ | | | $4$ | | |

2. (a) On a :

$$f(x) - g(x) = \frac{x^4}{x^2-1} - (x^2+1) = \frac{x^4 - (x^2+1)(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1}$$

Donc :

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

(b) De plus $f(x) - g(x)$ est du signe de $x^2 - 1$ donc la courbe $\mathcal{C}_1$ est au-dessous de la courbe $\mathcal{C}_2$ pour $x \in ]-1;1[$ et au dessus pour $x \in ]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

3. La représentation graphique des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est la suivante :