

## Devoir de Mathématiques n°3

**Restitution organisée de connaissances**

Cet exercice permet de mobiliser quelques connaissances de base afin de démontrer que la fonction  $\begin{cases} f(x) = \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$  est continue en 0.

On rappelle le « Théorème des Gendarmes » :

**Théorème.** Soient  $u, v$  et  $w$  trois fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  avec  $\alpha \in I$  telles que  $u(x) \leq v(x) \leq w(x)$  pour tout  $x \in I$ . Si  $\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) = l$  et  $\lim_{x \rightarrow \alpha} w(x) = l$  alors  $\lim_{x \rightarrow \alpha} v(x) = l$ .

- (a) Étudier les variations de la fonction  $g(x) = \sin x - x$  sur l'intervalle  $[-\pi; \pi]$ .  
(b) En déduire que  $f(x) \leq 1$  pour  $x \in [-\pi; \pi]$ .
- (a) Étudier les variations de la fonction  $h(x) = x \cos x - \sin x$  sur l'intervalle  $[-\pi; \pi]$ .  
(b) En déduire que  $f(x) \geq \cos x$  pour  $x \in [-\pi; \pi]$ .
- Démontrer que la fonction  $f$  est continue en 0.

**Exercice 1**

On considère la fonction  $f(x) = \frac{4}{x-2}$  pour  $x \in [0; 1]$ .

- Soit le polynôme  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , déterminer  $a, b, c$  et  $d$  pour que  $P$  possède les mêmes valeurs et les mêmes nombres dérivés que  $f$  en 0 et 1.
- Démontrer que  $f(x) - P(x) = \frac{x^2(x-1)^2}{x-2}$ .
- Étudier les variations de la fonction  $\delta(x) = f(x) - P(x)$  sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

**Exercice 2**

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} f'(x) - 2x(1 + [f(x)]^2) = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

- On pose  $f(x) = \tan[g(x)]$  avec  $g$  définie et dérivable telle que  $-\frac{\pi}{2} < g(x) < \frac{\pi}{2}$ . Montrer que la fonction  $g$  est solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} g'(x) - 2x = 0 \\ g(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

- Déterminer la fonction  $g$  et en déduire l'expression de la fonction  $f$ .

### Exercice 3

1. On considère l'équation  $(E) : z^3 - 8 = 0$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .
  - (a) Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $z^3 - 8 = (z - 2)(az^2 + bz + c)$ .
  - (b) Résoudre l'équation  $(E)$ .
2. Le plan est muni d'un repère orthonormé, on considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $z_A = -2$ ,  $z_B = 1 + i\sqrt{3}$  et  $z_C = 1 - i\sqrt{3}$ .
  - (a) Faire une figure.
  - (b) Prouver que le triangle  $ABC$  est équilatéral.

### Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1. On rappelle que deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont orthogonaux si et seulement si  $xx' + yy' = 0$  et colinéaires si et seulement si  $xy' = x'y$ . On note respectivement les affixes des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :  $z_{\vec{u}} = x + iy$  et  $z_{\vec{v}} = x' + iy'$ .
  - (a) Montrer que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si et seulement si  $\operatorname{Re}(\overline{z_{\vec{u}}}z_{\vec{v}}) = 0$ .
  - (b) Montrer que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si  $\operatorname{Im}(\overline{z_{\vec{u}}}z_{\vec{v}}) = 0$ .
2. Étant donné un point  $M(x; y)$  du plan d'affixe  $z = x + iy$  on définit le point  $M'$  d'affixe  $z' = z^2$ .
  - (a) Calculer les coordonnées du point  $M'$  en fonction de  $x$  et de  $y$ .
  - (b) Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tels que les vecteurs  $\overrightarrow{OM}$  et  $\overrightarrow{OM'}$  soient orthogonaux.
  - (c) Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tels que les vecteurs  $\overrightarrow{OM}$  et  $\overrightarrow{OM'}$  soient colinéaires.