Devoir de Mathématiques n°3

Restitution organisée de connaissances

Cet exercice permet de mobiliser quelques connaissances de base afin de démontrer que la fonction $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ est continue en 0.

On rappelle le « Théorème des Gendarmes » :

Théorème. *Soient u, v et w trois fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ avec $\alpha \in I$ telles que $u(x) \leqslant v(x) \leqslant w(x)$ pour tout $x \in I$. Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} w(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) = l$.*

1. (a) Étudier les variations de la fonction $g(x) = \sin x - x$ sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
   (b) En déduire que $f(x) \leqslant 1$ pour $x \in [-\pi; \pi]$.
2. (a) Étudier les variations de la fonction $h(x) = x\cos x - \sin x$ sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
   (b) En déduire que $f(x) \geqslant \cos x$ pour $x \in [-\pi; \pi]$.
3. Démontrer que la fonction f est continue en 0.

Exercice 1

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{4}{x-2}$ pour $x \in [0; 1]$.

1. Soit le polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, déterminer a, b, c et d pour que P possède les mêmes valeurs et les mêmes nombres dérivés que f en 0 et 1.
2. Démontrer que $f(x) - P(x) = \dfrac{x^2(x-1)^2}{x-2}$.
3. Étudier les variations de la fonction $\delta(x) = f(x) - P(x)$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

Exercice 2

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} f'(x) - 2x\left(1 + [f(x)]^2\right) = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. On pose $f(x) = \tan[g(x)]$ avec g définie et dérivable telle que $-\dfrac{\pi}{2} < g(x) < \dfrac{\pi}{2}$. Montrer que la fonction g est solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} g'(x) - 2x = 0 \\ g(0) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

2. Déterminer la fonction g et en déduire l'expression de la fonction f.

Exercice 3

1. On considère l'équation $(E)\ :\ z^3 - 8 = 0\ ,\ z \in \mathbb{C}$.
   (a) Déterminer les réels a, b et c tels que $z^3 - 8 = (z-2)(az^2 + bz + c)$.
   (b) Résoudre l'équation (E).
2. Le plan est muni d'un repère orthonormé, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.
   (a) Faire une figure.
   (b) Prouver que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1. On rappelle que deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$ et colinéaires si et seulement si $xy' = x'y$. On note respectivement les affixes des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$: $z_{\overrightarrow{u}} = x + iy$ et $z_{\overrightarrow{v}} = x' + iy'$.
   (a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\mathcal{R}e(\overline{z_{\overrightarrow{u}}}z_{\overrightarrow{v}}) = 0$.
   (b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\mathcal{I}m(\overline{z_{\overrightarrow{u}}}z_{\overrightarrow{v}}) = 0$.
2. Étant donné un point $M(x;y)$ du plan d'affixe $z = x + iy$ on définit le point M' d'affixe $z' = z^2$.
   (a) Calculer les coordonnées du point M' en fonction de x et de y.
   (b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ soient orthogonaux.
   (c) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ soient colinéaires.