

Correction du devoir de Mathématiques n°3

Restitution organisée de connaissances

1. (a) La fonction $g(x) = \sin x - x$ est définie et dérivable sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ et $g'(x) = \cos x - 1 \leq 0$.
On en déduit ses variations :

x	$-\pi$	0	π
$g(x)$	π	0	$-\pi$

\swarrow \searrow

- (b) – Pour $x \in]0; \pi]$ on a $\sin x - x \leq 0$ d'où $\frac{\sin x}{x} - 1 \leq 0$ et $f(x) \leq 1$.
 – Pour $x \in [-\pi; 0[$ on a $\sin x - x \geq 0$ d'où $\frac{\sin x}{x} - 1 \leq 0$ et $f(x) \leq 1$.
 – Pour $x = 0$ on a $f(x) = 1 \leq 1$.

2. (a) La fonction $h(x) = x \cos x - \sin x$ est définie et dérivable sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ et $h'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x \leq 0$. On en déduit ses variations :

x	$-\pi$	0	π
$h(x)$	π	0	$-\pi$

\swarrow \searrow

- (b) – Pour $x \in]0; \pi]$ on a $x \cos x - \sin x \leq 0$ d'où $\cos x - \frac{\sin x}{x} \leq 0$ et $f(x) \geq \cos x$.
 – Pour $x \in [-\pi; 0[$ on a $x \cos x - \sin x \geq 0$ d'où $\cos x - \frac{\sin x}{x} \leq 0$ et $f(x) \geq \cos x$.
 – Pour $x = 0$ on a $f(x) = 1 \geq \cos(0) = 1$.

3. On a montré que $\cos x \leq f(x) \leq 1$ pour $x \in [-\pi; \pi]$. Or $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos(0) = 1$ donc d'après le Théorème des Gendarmes $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ et la fonction f est continue en 0.

Exercice 1

1. Les fonctions $f(x)$ et $P(x)$ sont définies et dérivables sur $[0; 1]$ et on a $f'(x) = \frac{-4}{(x-2)^2}$ et $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. D'où :

$$\begin{cases} P(0) = f(0) & \text{soit} & d = -2 \\ P(1) = f(1) & \text{soit} & a + b + c + d = -4 \\ P'(0) = f'(0) & \text{soit} & c = -1 \\ P'(1) = f'(1) & \text{soit} & 3a + 2b + c = -4 \end{cases}$$

On obtient après résolution de ce système $a = -1$, $b = 0$, $c = -1$ et $d = -2$ soit $P(x) = -x^3 - x - 2$.

2. On a :

$$f(x) - P(x) = \frac{4 + (x-2)(x^3 + x + 2)}{x-2} = \frac{x^4 - 2x^3 + x^2}{x-2} = \frac{x^2(x^2 - 2x + 1)}{x-2} = \frac{x^2(x-1)^2}{x-2}$$

3. La fonction $\delta(x) = f(x) - P(x)$ est définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$ et :

$$\delta'(x) = \frac{(2x(x-1)^2 + 2x^2(x-1))(x-2) - x^2(x-1)^2}{(x-2)^2} = \frac{x(x-1)((2(x-1) + 2x))(x-2) - x^2(x-1)^2}{(x-2)^2}$$

$$\delta'(x) = \frac{x(x-1)(4x-2)(x-2) - x^2(x-1)^2}{(x-2)^2} = \frac{x(x-1)((4x-2)(x-2) - x(x-1))}{(x-2)^2} = \frac{x(x-1)(3x^2 - 9x + 4)}{(x-2)^2}$$

Le trinôme $3x^2 - 9x + 4$ admet pour racines $\frac{9 - \sqrt{33}}{6}$ et $\frac{9 + \sqrt{33}}{6}$. On en déduit les variations de la fonction δ :

x	0	$\frac{9-\sqrt{33}}{6}$	1
$\delta'(x)$	0	-	+ 0
$\delta(x)$	0	\searrow	\nearrow 0
		...	

Exercice 2

1. Si la fonction g est définie et dérivable avec $-\frac{\pi}{2} < g(x) < \frac{\pi}{2}$ alors la fonction $f(x) = \tan[g(x)]$ l'est également et :

$$f'(x) = (1 + \tan^2[g(x)])g'(x) = (1 + [f(x)]^2)f'(x)$$

D'où :

$$(1 + [f(x)]^2)g'(x) - 2x(1 + [f(x)]^2) = 0$$

Et comme $1 + [f(x)]^2 \neq 0$ on en déduit que $g'(x) - 2x = 0$, de plus $f(0) = \tan[g(0)] = 1$ donc $g(0) = \frac{\pi}{4}$.

2. On a $g'(x) = 2x$ donc $g(x) = x^2 + C$ et comme $g(0) = \frac{\pi}{4}$ on a $g(x) = x^2 + \frac{\pi}{4}$.

On obtient en conclusion :

$$f(x) = \tan\left[x^2 + \frac{\pi}{4}\right], \quad x \in \left]-\frac{\sqrt{\pi}}{2}; \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right[$$

Exercice 3

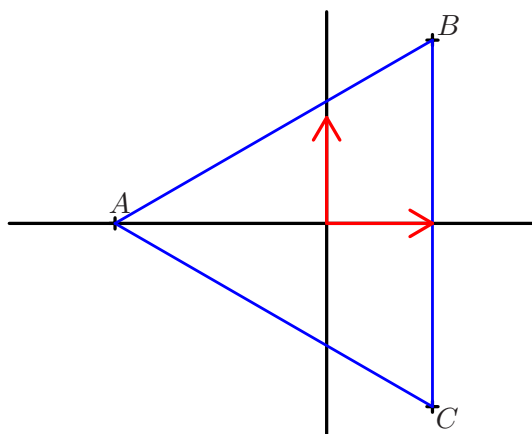
1. (a) On a $(z-2)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - 2az^2 - 2bz - 2c = az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c$, d'où par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 0 \\ c - 2b = 0 \\ -2c = -8 \end{cases}$$

On obtient $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$ d'où $z^3 - 8 = (z-2)(z^2 + 2z + 4)$.

(b) Les racines de l'équation $z^2 + 2z + 4 = 0$ sont $-1 - i\sqrt{3}$ et $-1 + i\sqrt{3}$ donc l'équation (E) a pour ensemble solution $S = \{2, -1 - i\sqrt{3}, -1 + i\sqrt{3}\}$.

2. (a) La figure est la suivante :



(b) On a :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

De même :

$$AC = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

et :

$$BC = \sqrt{0^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1. On a :

$$\overline{z_{\vec{u}}} z_{\vec{v}} = (x - iy)(x' + iy') = (xx' + yy') + i(xy' - x'y)$$

(a) Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$ soit $\operatorname{Re}(\overline{z_{\vec{u}}} z_{\vec{v}}) = 0$.

(b) Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$ soit $\operatorname{Im}(\overline{z_{\vec{u}}} z_{\vec{v}}) = 0$.

2. (a) On a :

$$z' = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

Le point M' a donc pour coordonnées $(x^2 - y^2; 2xy)$.

(b) Les vecteurs \overrightarrow{OM} et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\operatorname{Re}(\overline{z_{\overrightarrow{OM}}} z_{\overrightarrow{OM'}}) = 0$.

$$\overline{z_{\overrightarrow{OM}}} z_{\overrightarrow{OM'}} = (x - iy)(x^2 - y^2 + 2ixy) = x(x^2 - y^2) + 2ixy^2 - iy(x^2 - y^2) + 2ix^2y = x(x^2 + y^2) + iy(x^2 + y^2)$$

On a $x = 0$ ou $x^2 + y^2 = 0$, donc le point M appartient à l'axe des ordonnées ou bien est l'origine du repère, en conclusion l'ensemble des points M tels que les vecteurs \overrightarrow{OM} et $\overrightarrow{OM'}$ soient orthogonaux est l'axe des ordonnées.

(c) Les vecteurs \overrightarrow{OM} et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\operatorname{Im}(\overline{z_{\overrightarrow{OM}}} z_{\overrightarrow{OM'}}) = 0$. On a $y = 0$ ou $x^2 + y^2 = 0$, donc le point M appartient à l'axe des abscisses ou bien est l'origine du repère, en conclusion l'ensemble des points M tels que les vecteurs \overrightarrow{OM} et $\overrightarrow{OM'}$ soient colinéaires est l'axe des abscisses.