Correction du devoir de Mathématiques n°3

Restitution organisée de connaissances

1. (a) La fonction $g(x) = x - \sin x$ est définie et dérivable sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$ et $g'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$. On en déduit ses variations :

x	$-\pi$		0		π
					π
				$\nearrow$	
$g(x)$			0		
		$\nearrow$			
	$-\pi$				

   (b) – Pour $x \in]0;\pi]$ on a $x - \sin x \geqslant 0$ d'où $1 - \dfrac{\sin x}{x} \geqslant 0$ et $f(x) \leqslant 1$.
   – Pour $x \in [-\pi;0[$ on a $x - \sin x \leqslant 0$ d'où $1 - \dfrac{\sin x}{x} \geqslant 0$ et $f(x) \leqslant 1$.
   – Pour $x = 0$ on a $f(x) = 1 \leqslant 1$.

2. (a) La fonction $h(x) = \sin x - x\cos x$ est définie et dérivable sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$ et $h'(x) = \cos x - \cos x + x\sin x = x\sin x \geqslant 0$. On en déduit ses variations :

x	$-\pi$		0		π
					π
				$\nearrow$	
$h(x)$			0		
		$\nearrow$			
	$-\pi$				

   (b) – Pour $x \in]0;\pi]$ on a $\sin x - x\cos x \geqslant 0$ d'où $\dfrac{\sin x}{x} - \cos x \geqslant 0$ et $f(x) \geqslant \cos x$.
   – Pour $x \in [-\pi;0[$ on a $\sin x - x\cos x \leqslant 0$ d'où $\dfrac{\sin x}{x} - \cos x \geqslant 0$ et $f(x) \geqslant \cos x$.
   – Pour $x = 0$ on a $f(x) = 1 \geqslant \cos(0) = 1$.

3. On a montré que $\cos x \leqslant f(x) \leqslant 1$ pour $x \in [-\pi;\pi]$. Or $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos(0) = 1$ donc d'après le Théorème des Gendarmes $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ et la fonction f est continue en 0.

Exercice 1

1. Les fonctions $f(x)$ et $P(x)$ sont définies et dérivables sur $[0;1]$ et on a $f'(x) = \dfrac{-4}{(x+1)^2}$ et $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. D'où :

$$\left\{\begin{array}{rclcrcl} P(0) & = & f(0) & \text{soit} & d & = & 4 \\ P(1) & = & f(1) & \text{soit} & a+b+c+d & = & 2 \\ P'(0) & = & f'(0) & \text{soit} & c & = & -4 \\ P'(1) & = & f'(1) & \text{soit} & 3a+2b+c & = & -1 \end{array}\right.$$

On obtient après résolution de ce système $a = -1$, $b = 3$, $c = -4$ et $d = 4$ soit $P(x) = -x^3+3x^2-4x+4$.

2. On a :

$$f(x) - P(x) = \frac{4 + (x+1)(x^3 - 3x^2 + 4x - 4)}{x+1} = \frac{x^4 - 2x^3 + x^2}{x+1} = \frac{x^2(x^2 - 2x + 1)}{x+1} = \frac{x^2(x-1)^2}{x+1}$$

3. La fonction $\delta(x) = f(x) - P(x)$ est définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$ et :

$$\delta'(x) = \frac{(2x(x-1)^2 + 2x^2(x-1))(x+1) - x^2(x-1)^2}{(x+1)^2} = \frac{x(x-1)((2(x-1) + 2x))(x+1) - x^2(x-1)^2}{(x+1)^2}$$

$$\delta'(x) = \frac{x(x-1)(4x-2)(x+1) - x^2(x-1)^2}{(x+1)^2} = \frac{x(x-1)((4x-2)(x+1) - x(x-1))}{(x+1)^2} = \frac{x(x-1)(3x^2 + 3x - 2)}{(x+1)^2}$$

Le trinôme $3x^2 + 3x - 2$ admet pour racines $\dfrac{-3 - \sqrt{33}}{6}$ et $\dfrac{-3 + \sqrt{33}}{6}$. On en déduit les variations de la fonction δ :

x	0		$\frac{-3+\sqrt{33}}{6}$		1
$\delta'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$\delta(x)$			$\ldots$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

Exercice 2

1. Si la fonction g est définie et dérivable avec $-\dfrac{\pi}{2} < g(x) < \dfrac{\pi}{2}$ alors la fonction $f(x) = \tan[g(x)]$ l'est également et :

$$f'(x) = (1 + \tan^2[g(x)])g'(x) = (1 + [f(x)]^2)f'(x)$$

D'où :

$$(1 + [f(x)]^2)g'(x) + 2x(1 + [f(x)]^2) = 0$$

Et comme $1 + [f(x)]^2 \neq 0$ on en déduit que $g'(x) + 2x = 0$, de plus $f(0) = \tan[g(0)] = 1$ donc $g(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

2. On a $g'(x) = -2x$ donc $g(x) = -x^2 + C$ et comme $g(0) = \dfrac{\pi}{4}$ on a $g(x) = -x^2 + \dfrac{\pi}{4}$.

On obtient en conclusion :

$$f(x) = \tan[-x^2 + \frac{\pi}{4}] \quad , \quad x \in]-\frac{\sqrt{3\pi}}{2}; \frac{\sqrt{3\pi}}{2}[$$

Exercice 3

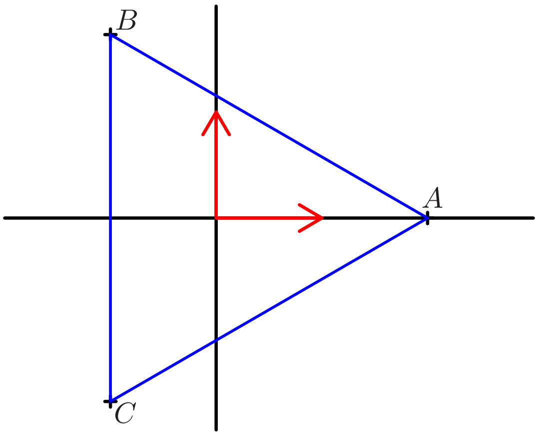
1. (a) On a $(z+2)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz + 2az^2 + 2bz + 2c = az^3 + (b+2a)z^2 + (c+2b)z + 2c$, d'où par identification :

$$\begin{cases} a &= 1 \\ b + 2a &= 0 \\ c + 2b &= 0 \\ 2c &= 8 \end{cases}$$

On obtient $a = 1$, $b = -2$, $c = 4$ d'où $z^3 + 8 = (z+2)(z^2 - 2z + 4)$.

(b) Les racines de l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$ sont $1 - i\sqrt{3}$ et $1 + i\sqrt{3}$ donc l'équation (E) a pour ensemble solution $S = \{-2, 1 - i\sqrt{3}, 1 + i\sqrt{3}\}$.

2. (a) La figure est la suivante :



(b) On a :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{3^3 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

De même :

$$AC = \sqrt{3^3 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

et :

$$BC = \sqrt{0^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1. On a :

$$z_{\overrightarrow{u}}\overline{z_{\overrightarrow{v}}} = (x + iy)(x' - iy') = (xx' + yy') + i(x'y - xy')$$

(a) Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$ soit $\mathcal{R}e(z_{\overrightarrow{u}}\overline{z_{\overrightarrow{v}}}) = 0$.

(b) Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x'y - xy' = 0$ soit $\mathcal{I}m(z_{\overrightarrow{u}}\overline{z_{\overrightarrow{v}}}) = 0$.

2. (a) On a :

$$z' = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

Le point M' a donc pour coordonnées $(x^2 - y^2; 2xy)$.

(b) Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\mathcal{R}e(z_{\overrightarrow{OM}}\overline{z_{\overrightarrow{OM'}}}) = 0$.

$$z_{\overrightarrow{OM}}\overline{z_{\overrightarrow{OM'}}} = (x+iy)(x^2-y^2-2ixy) = x(x^2-y^2)+2xy^2+iy(x^2-y^2)-2ix^2y = x(x^2+y^2)-iy(x^2+y^2)$$

On a $x = 0$ ou $x^2 + y^2 = 0$, donc le point M appartient à l'axe des ordonnées ou bien est l'origine du repère, en conclusion l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ soient orthogonaux est l'axe des ordonnées.

(c) Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\mathcal{I}m(z_{\overrightarrow{OM}}\overline{z_{\overrightarrow{OM'}}}) = 0$. On a $y = 0$ ou $x^2 + y^2 = 0$, donc le point M appartient à l'axe des abscisses ou bien est l'origine du repère, en conclusion l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ soient colinéaires est l'axe des abscisses.