# Correction du devoir de Mathématiques n°3

## Restitution organisée de connaissances

1. (a) La fonction $g(x) = x - \sin x$ est définie et dérivable sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$ et $g'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$. On en déduit ses variations :

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\pi & & 0 & & \pi \\ \hline & & & & & \pi \\ & & & & \nearrow & \\ g(x) & & & 0 & & \\ & & \nearrow & & & \\ & -\pi & & & & \end{array}$$

(b) – Pour $x \in ]0;\pi]$ on a $x - \sin x \geqslant 0$ d'où $1 - \dfrac{\sin x}{x} \geqslant 0$ et $f(x) \leqslant 1$.

– Pour $x \in [-\pi;0[$ on a $x - \sin x \leqslant 0$ d'où $1 - \dfrac{\sin x}{x} \geqslant 0$ et $f(x) \leqslant 1$.

– Pour $x = 0$ on a $f(x) = 1 \leqslant 1$.

2. (a) La fonction $h(x) = \sin x - x\cos x$ est définie et dérivable sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$ et $h'(x) = \cos x - \cos x + x\sin x = x\sin x \geqslant 0$. On en déduit ses variations :

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\pi & & 0 & & \pi \\ \hline & & & & & \pi \\ & & & & \nearrow & \\ h(x) & & & 0 & & \\ & & \nearrow & & & \\ & -\pi & & & & \end{array}$$

(b) – Pour $x \in ]0;\pi]$ on a $\sin x - x\cos x \geqslant 0$ d'où $\dfrac{\sin x}{x} - \cos x \geqslant 0$ et $f(x) \geqslant \cos x$.

– Pour $x \in [-\pi;0[$ on a $\sin x - x\cos x \leqslant 0$ d'où $\dfrac{\sin x}{x} - \cos x \geqslant 0$ et $f(x) \geqslant \cos x$.

– Pour $x = 0$ on a $f(x) = 1 \geqslant \cos(0) = 1$.

3. On a montré que $\cos x \leqslant f(x) \leqslant 1$ pour $x \in [-\pi;\pi]$. Or $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos(0) = 1$ donc d'après le Théorème des Gendarmes $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ et la fonction $f$ est continue en 0.

## Exercice 1

1. Les fonctions $f(x)$ et $P(x)$ sont définies et dérivables sur $[0;1]$ et on a $f'(x) = \dfrac{-4}{(x+1)^2}$ et $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. D'où :

$$\left\{\begin{array}{rclcrcl} P(0) & = & f(0) & \text{soit} & d & = & 4 \\ P(1) & = & f(1) & \text{soit} & a+b+c+d & = & 2 \\ P'(0) & = & f'(0) & \text{soit} & c & = & -4 \\ P'(1) & = & f'(1) & \text{soit} & 3a+2b+c & = & -1 \end{array}\right.$$

On obtient après résolution de ce système $a = -1$, $b = 3$, $c = -4$ et $d = 4$ soit $P(x) = -x^3 + 3x^2 - 4x + 4$.

2. On a :

$$f(x)-P(x)=\frac{4+(x+1)(x^3-3x^2+4x-4)}{x+1}=\frac{x^4-2x^3+x^2}{x+1}=\frac{x^2(x^2-2x+1)}{x+1}=\frac{x^2(x-1)^2}{x+1}$$

3. La fonction $\delta(x)=f(x)-P(x)$ est définie et dérivable sur l'intervalle $[0;1]$ et :

$$\delta'(x)=\frac{(2x(x-1)^2+2x^2(x-1))(x+1)-x^2(x-1)^2}{(x+1)^2}=\frac{x(x-1)((2(x-1)+2x))(x+1)-x^2(x-1)^2}{(x+1)^2}$$

$$\delta'(x)=\frac{x(x-1)(4x-2)(x+1)-x^2(x-1)^2}{(x+1)^2}=\frac{x(x-1)((4x-2)(x+1)-x(x-1))}{(x+1)^2}=\frac{x(x-1)(3x^2+3x-2)}{(x+1)^2}$$

Le trinôme $3x^2+3x-2$ admet pour racines $\dfrac{-3-\sqrt{33}}{6}$ et $\dfrac{-3+\sqrt{33}}{6}$. On en déduit les variations de la fonction $\delta$ :

| $x$ | $0$ | | $\frac{-3+\sqrt{33}}{6}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\delta'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $\delta(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\dots$ | $\searrow$ | $0$ |

# Exercice 2

1. Si la fonction $g$ est définie et dérivable avec $-\frac{\pi}{2}<g(x)<\frac{\pi}{2}$ alors la fonction $f(x)=\tan[g(x)]$ l'est également et :

$$f'(x)=(1+\tan^2[g(x)])g'(x)=(1+[f(x)]^2)f'(x)$$

D'où :

$$(1+[f(x)]^2)g'(x)+2x(1+[f(x)]^2)=0$$

Et comme $1+[f(x)]^2\neq 0$ on en déduit que $g'(x)+2x=0$, de plus $f(0)=\tan[g(0)]=1$ donc $g(0)=\frac{\pi}{4}$.

2. On a $g'(x)=-2x$ donc $g(x)=-x^2+C$ et comme $g(0)=\frac{\pi}{4}$ on a $g(x)=-x^2+\frac{\pi}{4}$.

On obtient en conclusion :

$$f(x)=\tan[-x^2+\frac{\pi}{4}]\quad,\quad x\in]-\frac{\sqrt{3\pi}}{2};\frac{\sqrt{3\pi}}{2}[$$

# Exercice 3

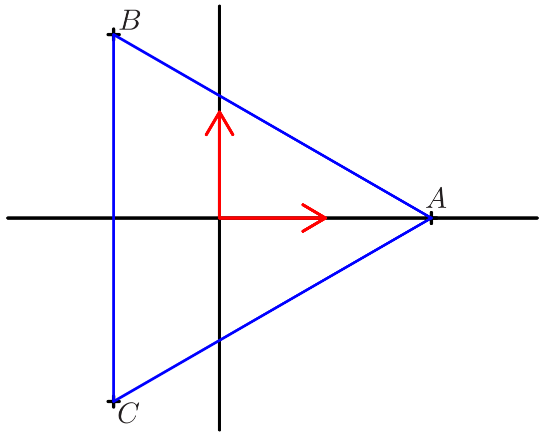
1. (a) On a $(z+2)(az^2+bz+c)=az^3+bz^2+cz+2az^2+2bz+2c=az^3+(b+2a)z^2+(c+2b)z+2c$, d'où par identification :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a&=&1\\ b+2a&=&0\\ c+2b&=&0\\ 2c&=&8\end{array}\right.$$

On obtient $a=1$, $b=-2$, $c=4$ d'où $z^3+8=(z+2)(z^2-2z+4)$.

(b) Les racines de l'équation $z^2-2z+4=0$ sont $1-i\sqrt{3}$ et $1+i\sqrt{3}$ donc l'équation $(E)$ a pour ensemble solution $S=\{-2,1-i\sqrt{3},1+i\sqrt{3}\}$ .

2. (a) La figure est la suivante :




(b) On a :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{3^3 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

De même :

$$AC = \sqrt{3^3 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

et :

$$BC = \sqrt{0^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

# Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1. On a :

$$z_{\overrightarrow{u}}\overline{z_{\overrightarrow{v}}} = (x+iy)(x'-iy') = (xx'+yy') + i(x'y - xy')$$

(a) Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$ soit $\mathcal{R}e(z_{\overrightarrow{u}}\overline{z_{\overrightarrow{v}}}) = 0$.

(b) Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x'y - xy' = 0$ soit $\mathcal{I}m(z_{\overrightarrow{u}}\overline{z_{\overrightarrow{v}}}) = 0$.

2. (a) On a :

$$z' = z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

Le point $M'$ a donc pour coordonnées $(x^2 - y^2; 2xy)$.

(b) Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\mathcal{R}e(z_{\overrightarrow{OM}}\overline{z_{\overrightarrow{OM'}}}) = 0$.

$$z_{\overrightarrow{OM}}\overline{z_{\overrightarrow{OM'}}} = (x+iy)(x^2-y^2-2ixy) = x(x^2-y^2)+2xy^2+iy(x^2-y^2)-2ix^2y = x(x^2+y^2)-iy(x^2+y^2)$$

On a $x = 0$ ou $x^2 + y^2 = 0$, donc le point $M$ appartient à l'axe des ordonnées ou bien est l'origine du repère, en conclusion l'ensemble des points $M$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ soient orthogonaux est l'axe des ordonnées.

(c) Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\mathcal{I}m(z_{\overrightarrow{OM}}\overline{z_{\overrightarrow{OM'}}}) = 0$. On a $y = 0$ ou $x^2 + y^2 = 0$, donc le point $M$ appartient à l'axe des abscisses ou bien est l'origine du repère, en conclusion l'ensemble des points $M$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ soient colinéaires est l'axe des abscisses.