Méthode d'Euler

Le but de l'activité est d'étudier graphiquement la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f'(x)+xf(x) & = & 0 \\ f(0) & = & 1 \end{array}\right.$$

On admet l'existence d'une unique fonction f solution.

Approximation de la fonction f par la méthode d'Euler

On considère un pas $\delta \in \mathbb{R}$ et on définit la suite $\boxed{a_n = n\delta \quad , \quad n \in \mathbb{N}}$. On note respectivement b_n et c_n les valeurs approchées de $f(a_n)$ et $f'(a_n)$.

1. (a) Exprimer $f'(a_n)$ en fonction de a_n et $f(a_n)$.
   (b) En déduire que $\boxed{c_n = -a_n b_n}$.
2. On rappelle qu'une fonction g définie et dérivable au voisinage d'un point x_0 peut être approchée localement par la fonction affine $x \mapsto g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)$ au voisinage de x_0.
   (a) Écrire une approximation affine de la fonction f au voisinage de a_n.
   (b) En déduire une valeur approchée de $f(a_{n+1})$ en fonction de $f(a_n)$, $f'(a_n)$ et δ.
   (c) En déduire que $\boxed{b_{n+1} = b_n + \delta c_n}$.

Calcul des suites a_n, b_n et c_n à l'aide du tableur

Programmer les suites a_n, b_n et c_n à l'aide d'un tableur pour un pas $\delta = 0,1$.

Appeler l'examinateur pour lui faire vérifier la programmation.

Représentation graphique de la fonction f à l'aide du tableur

Programmer les suites a_n, b_n et c_n pour un pas $\delta = -0,1$ puis représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-4; 4]$ à l'aide du tableur.

Appeler l'examinateur et lui présenter la représentation graphique réalisée.