Fonction exponentielle

Définition 1. *On admet que l'équation différentielle* $\left\{\begin{array}{rcl} f'(x) & = & f(x) \\ f(0) & = & 1 \end{array}\right.$ *possède une unique fonction* f *solution sur* $\mathbb{R}$*, cette fonction* f *est appelée* exponentielle *et notée* $f(x) = \exp(x)$*.*

1 Relation fonctionnelle caractérisant la fonction exponentielle

Propriété 1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a* $\exp(x) \neq 0$ *et* $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$*.*

Démonstration. au programme en étudiant la fonction $g(x) = \exp(x)\exp(-x)$. □

Corollaire 1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a* $\exp(x) > 0$*.*

Démonstration. au programme en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires. □

Propriété 2. *Pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$ *on a* $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$*.*

Démonstration. au programme en étudiant la fonction $g(x) = \dfrac{\exp(a+x)}{\exp(a)\exp(x)}$. □

Corollaire 2.

1. *Pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$ *on a* $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$*.*
2. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$ *on a* $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$*.*

Démonstration. au programme. □

En notant $\exp(1) = e$, on a pour $n \in \mathbb{Z}$ la formule $\exp(n) = \exp(n \times 1) = [\exp(1)]^n = e^n$. On convient d'étendre cette notation aux réels en posant $\exp(x) = e^x$. On a alors les formules suivantes :

$$e^0 = 1 \qquad e^{a+b} = e^a e^b \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \qquad e^{nx} = [e^x]^n$$

2 Étude de la fonction exponentielle

Propriété 3. *La fonction exponentielle est définie, continue, dérivable, strictement positive et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et* $\exp'(x) = \exp(x)$*.*

Démonstration. au programme. □

Propriété 4.

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$$

Démonstration. au programme en étudiant la fonction $g(x) = \exp(x) - x$. □

Propriété 5.

$$\lim_{x \to -\infty} x\exp(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$$

Démonstration. au programme en étudiant la fonction $g(x) = \exp(x) - \dfrac{x^2}{2}$. □

3 Représentation graphique