# Devoir maison de Mathématiques n°3

## Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère l'application $F$ qui à tout point $M$ du plan d'affixe $z = x + iy$ associe le point $M'$ d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que $z' = \dfrac{z^2}{z-1}$.

1. Montrer qu'il existe un point $A$ en lequel l'application $F$ n'est pas définie et déterminer son affixe.
2. Exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et de $y$.
3. Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan tels que le point $M'$ appartienne à l'axe des abscisses et le représenter graphiquement.

## Exercice 2

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

### Partie A

Soit $g$ la fonction définie par :

$$g(x) = e^x - x - 1$$

1. Étudier les variations de la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de $g(x)$.
2. Justifier que pour tout $x$, $(e^x - x)$ est strictement positif.

### Partie B

1. (a) Calculer les limites de la fonction $f$ en $+\infty$ et $-\infty$.
   (b) Interpréter graphiquement les résultats précédents.
2. (a) Calculer $f'(x)$, $f'$ désignant la fonction dérivée de $f$.
   (b) Étudier le sens de variations de $f$, puis dresser son tableau de variations.
3. (a) Déterminer une équation de la tangente $(T)$ à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
   (b) À l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite $(T)$.
4. Tracer la droite $(T)$, les asymptotes et la courbe $(\mathcal{C})$.