Correction du devoir maison de Mathématiques n°3

Exercice 1

1. L'application F n'est pas définie pour $z = 1$ soit au point A d'affixe $z_A = 1$.
2. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{z^2}{z-1} &= \frac{(x+iy)^2}{(x+iy)-1} \\
\frac{z^2}{z-1} &= = \frac{(x^2-y^2)+2ixy}{(x-1)+iy} \\
\frac{z^2}{z-1} &= \frac{[(x^2-y^2)+2ixy][(x-1)-iy]}{[(x-1)+iy][(x-1)-iy]} \\
\frac{z^2}{z-1} &= = \frac{[(x^2-y^2)(x-1)+2xy^2]+i[2xy(x-1)-y(x^2-y^2)]}{(x-1)^2+y^2}
\end{aligned}$$

   d'où :

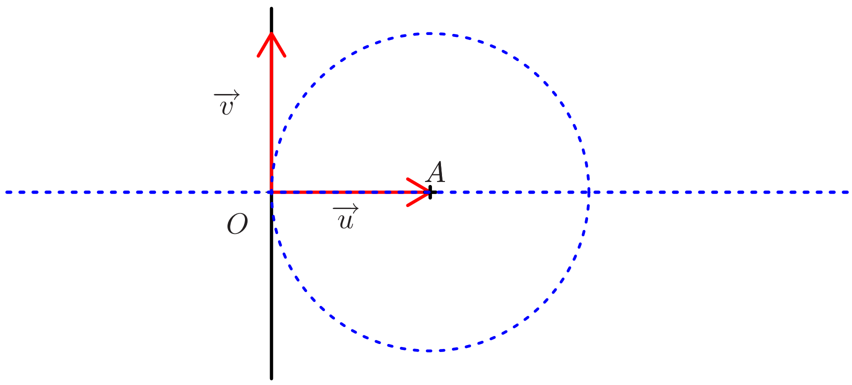
$$x' = \frac{(x^2-y^2)(x-1)+2xy^2}{(x-1)^2+y^2} \quad \text{et} \quad y' = \frac{2xy(x-1)-y(x^2-y^2)}{(x-1)^2+y^2}$$

3. Le point M' appartient à l'axe des abscisses si et seulement si $y' = 0$, or

$$2xy(x-1)-y(x^2-y^2) = y[2x(x-1)-(x^2-y^2)] = y[x^2+y^2-2x] = y[(x-1)^2+y^2-1]$$

   L'ensemble des points M vérifiant l'équation $y = 0$ est l'axe des absicsses et l'ensemble des points vérifiant l'équation $(x-1)^2+y^2-1 = 0$ est le cercle de centre A et de rayon 1.

   En conclusion, l'ensemble des points M du plan tels que le point M' appartienne à l'axe des abscisses est l'union de l'axe des abscisses privé du point A et du cercle de centre A et de rayon 1.



Exercice 2

Partie A

1. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de plus $g'(x) = e^x - 1$ d'où le tableau de variations de la fonction g :

x		0	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

   On en déduit que $g(x) \geqslant 0$ pour tout x.

2. D'après la question précédente, $e^x - x - 1 \geqslant 0$ donc $e^x - x \geqslant 1$ et a fortiori $(e^x - x)$ est strictement positif pour tout x.

Partie B

1. (a) On a $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x} - 1}$ $(x \neq 0)$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et de plus $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

   (b) On en déduit que la courbe $(\mathcal{C})$ possède une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$ et une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ en $-\infty$.

2. (a) D'après la partie A. la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = \frac{1 \times (e^x - x) - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{(1 - x)e^x}{(e^x - x)^2}$$

   (b) On en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

3. (a) La tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0 a pour équation :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 1(x - 0) + 0 = x$$

   (b) On a :

$$f(x) - x = \frac{x}{e^x - x} - x = \frac{x - x(e^x - x)}{e^x - x} = \frac{-x(e^x - x - 1)}{e^x - x}$$

   D'après la partie A. $f(x) - x$ est du signe de $-x$ et donc $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (T) pour $x < 0$ et au-dessous pour $x > 0$.

4. La représentation graphique de la fonction f est la suivante :