

Nombres complexes (deuxième partie)

1 Interprétation géométrique des nombres complexes

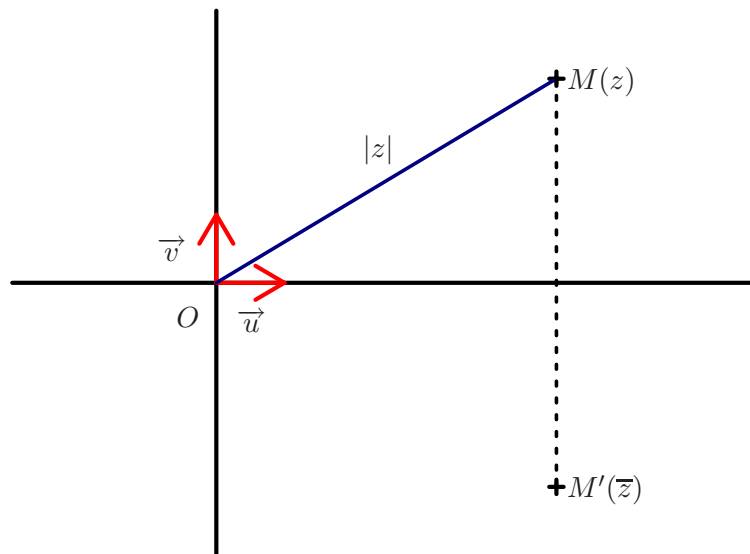
Définition 1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) on définit :

- L'affixe d'un point $M(x; y)$ par le nombre complexe $z_M = x + iy$.
- L'affixe d'un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par le nombre complexe $z_{\vec{u}} = x + iy$.

Le plan est alors appelé *plan complexe*, l'axe des abscisses est appelé *axe des réels* et l'axe des ordonnées *axe des imaginaires purs*.

Propriété 1. Soit M un point du plan complexe (O, \vec{u}, \vec{v}) d'affixe z , alors :

1. $|z| = OM$.
2. \bar{z} est l'affixe du symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.



Démonstration. au programme. □

Propriété 2. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs et A, B et C trois points du plan complexe, alors :

1. Si $k \in \mathbb{R}$ alors $z_{k\vec{u}} = kz_{\vec{u}}$.
2. $z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$.
3. $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$.
4. Si $G = \text{bar}(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)$ alors $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$.

Démonstration. au programme. □

2 Écriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Définition 2. Soit θ un nombre réel, on lui associe le nombre complexe $z_\theta = \cos \theta + i \sin \theta$.

Propriété 3. $z_\alpha z_\beta = z_{\alpha+\beta}$

Démonstration. au programme. □

Par analogie avec la fonction exponentielle, on utilise désormais la notation d'Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Corollaire 1. Formule de Moivre

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad \text{soit} \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Démonstration. au programme. □

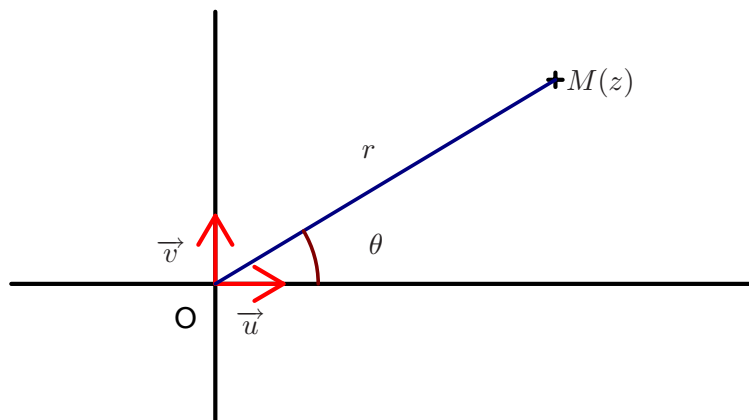
Théorème 1. Tout nombre complexe $z = x + iy$ non nul peut s'écrire de manière unique sous la forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$ avec r un réel strictement positif et θ un réel défini à 2π près. De plus on a :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Le réel θ est appelé argument du nombre complexe z et noté $\arg(z)$.

Démonstration. au programme. □

Le couple (r, θ) représente les coordonnées polaires du point M d'affixe z dans le repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) :



Propriété 4. Soient z et z' deux nombres complexes non nuls, alors :

1. $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$.
2. $\arg(-z) = \arg(z) + \pi [2\pi]$.
3. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$.
4. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) [2\pi]$.
5. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$.
6. $\arg(z^n) = n \times \arg(z) [2\pi]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. au programme. □

3 Écritures complexes des transformations du plan

Propriété 5. Soient A et B deux points et \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls du plan complexe, alors :

1. $AB = |z_B - z_A|$.
2. $(\vec{u}, \vec{v}) = \arg\left(\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}\right) [2\pi]$.

Démonstration. au programme. □

Corollaire 2. Un point M du plan complexe d'affixe z appartient au cercle de centre A et de rayon r si et seulement si il existe un réel θ tel que :

$$z = z_A + re^{i\theta}$$

Démonstration. au programme. □

Théorème 2. Soient M et M' deux points du plan complexe d'affixes respectives z et z' , alors :

1. Le point M' est l'image du point M par une translation de vecteur \vec{u} si et seulement si :

$$z' = z + z_{\vec{u}}$$

2. Le point M' est l'image du point M par une homothétie de centre A et de rapport k si et seulement si :

$$z' = k(z - z_A) + z_A$$

3. Le point M' est l'image du point M par la rotation de centre A et d'angle α si et seulement si :

$$z' = e^{i\alpha}(z - z_A) + z_A$$

Démonstration. au programme. □