Phénomènes exponentiels en Physique

Désintégration radioactive

La désintégration des atomes d'un corps radioactif est modélisée par l'équation différentielle $N'(t) = -\lambda N(t)$ où la variable t représente le temps et $N(t)$ le nombre d'atomes au temps t, la constante $\lambda > 0$ est la constante radioactive du corps considéré.

1. On appelle N_0 le nombre d'atomes au temps $t = 0$, prouver que $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.
2. On appelle *demi-vie* ou *période* et l'on note $\tau_{\frac{1}{2}}$ le temps nécessaire à la désintégration de la moitié des atomes du corps considéré. Prouver que $\tau_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$.
3. Le Carbone 14 a une demi-vie de 5730 années.
   (a) Calculer la constante radioactive λ du Carbone 14.
   (b) Représenter graphiquement la quantité $\dfrac{N(t)}{N_0}$ en fonction du temps (unités : 1cm pour 1000 ans en abscisse et 10 cm pour 1 en ordonnée).
   (c) Estimer graphiquement puis calculer le temps nécessaire à la désintégration de 70% des atomes de Carbone 14 d'un corps.
   (d) On appelle *temps caractéristique* et l'on note τ l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe représentative de la quantité $\dfrac{N(t)}{N_0}$ avec l'axe des abscisses. Estimer graphiquement τ puis le calculer.

Refroidissement d'un corps

La vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant.

1. Prouver que $T(t) = (T_i - T_0)e^{-Kt} + T_0$ où la variable t représente le temps, $T(t)$ la température au temps t, T_i la température du corps au temps $t = 0$, T_0 la température du milieu ambiant et K une constante positive.
2. Un corps plongé dans un milieu ambiant de température $T_0 = 20°C$ passe de $100°C$ à $80°C$ en 10 minutes. Au bout de combien de temps sa température arrivera-t-elle à $60°C$?