Devoir maison de Mathématiques n°4

Exercice 1

On considère l'équation $(E)\ :\ z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0$ où z désigne un nombre complexe.

Partie A

1. (a) Montrer que (E) admet une solution réelle notée z_1.
   (b) Déterminer les deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait :
$$z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = (z - z_1)(z - 2 - 2i)(az + b)$$
2. Résoudre (E).

Partie B

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives 1, $2+2i$ et $1-i$.

1. Représenter A, B et C.
2. Déterminer le module et un argument de $\dfrac{2+2i}{1-i}$. En déduire la nature du triangle OBC.
3. Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifier votre réponse.
4. Soit D l'image de O par la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et de centre C. Calculer l'affixe de D.
5. Quelle est la nature du quadrilatère $OCDB$?

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (unité graphique 4cm). Soit A le point d'affixe $z_A = i$ et B le point d'affixe $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

1. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par r.
   (a) Déterminer une écriture complexe de r.
   (b) Montrer que l'affixe de C est $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.
   (c) Écrire z_B et z_C sous forme algébrique.
   (d) Placer les points A, B et C.
2. Soit D le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, -1 et 2.
   (a) Montrer que l'affixe de D est $z_D = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$. Placer le point D.
   (b) Montrer que A, B, C et D sont sur un même cercle.
3. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par h.
   (a) Déterminer une écriture complexe de h.
   (b) Montrer que l'affixe de E est $z_E = \sqrt{3}$. Placer le point E.
4. (a) Calculer le rapport $\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$. On écrira le résultat sous forme exponentielle.
   (b) En déduire la nature du triangle CDE.

Exercice 3

On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(C) \left\{ \begin{array}{rcl} f(-x)f'(x) & = & 1 \quad \text{pour tout nombre réel } x \\ f(0) & = & -4 \end{array} \right.$$

(où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f) et de trouver cette fonction.

1. On suppose qu'il existe une fonction f vérifiant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = f(-x)f(x)$$
   (a) Démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer la fonction dérivée de la fonction g.
   (c) En déduire que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.
   (d) On considère l'équation différentielle :
$$(E) \quad y' = \frac{1}{16}y$$
   Montrer que la fonction f est solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0) = -4$.
2. Question de cours
   (a) On sait que la fonction $x \mapsto e^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E). Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x \mapsto Ke^{\frac{x}{16}}$ où K est un nombre réel quelconque.
   (b) Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0.
3. Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) et préciser quelle est cette fonction.