

Correction du devoir maison de Mathématiques n°4

Exercice 1

Partie A

1. (a) Posons $z = x \in \mathbb{R}$, alors :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = x^3 - (4+i)x^2 + (7+i)x - 4 = (x^3 - 4x^2 + 7x - 4) + i(-x^2 + x)$$

Ce complexe est nul si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont nulles :

$$\begin{cases} x^3 - 4x^2 + 7x - 4 = 0 \\ -x^2 + x = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation a pour solutions $x = 0$ et $x = 1$ dont seule $x = 1$ est solution de la première équation. En conclusion, (E) admet une unique solution réelle $z_1 = 1$.

- (b) On a :

$$(z - z_1)(z - 2 - 2i) = (z - 1)(z - 2 - 2i) = z^2 - (3 + 2i)z + (2 + 2i)$$

D'où :

$$(z - z_1)(z - 2 - 2i)(az + b) = [z^2 - (3 + 2i)z + (2 + 2i)][az + b] = az^3 + [b - (3 + 2i)a]z^2 + [(2 + 2i)a - (3 + 2i)b]z + (2 + 2i)b$$

et par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - (3 + 2i)a = -4 - i \\ (2 + 2i)a - (3 + 2i)b = 7 + i \\ (2 + 2i)b = -4 \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 + i \end{cases}$$

En conclusion, pour tout nombre complexe z , on a :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = (z - 1)(z - 2 - 2i)(z - 1 + i)$$

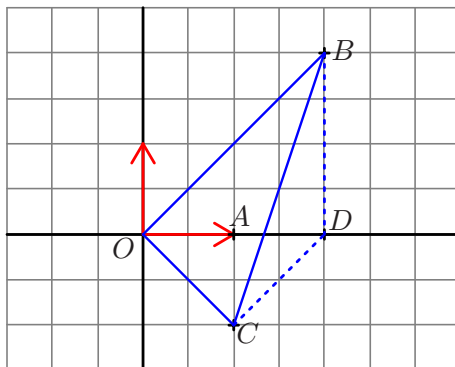
2. L'équation (E) a pour solutions $z_1 = 1$, $z_2 = 2 + 2i$ et $z_3 = 1 - i$.

Partie B

2. On a :

$$\frac{2 + 2i}{1 - i} = \frac{(2 + 2i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{4i}{2} = 2i$$

Le complexe $\frac{2 + 2i}{1 - i}$ a pour module 2 et pour argument $\frac{\pi}{2}$, on en déduit que $\arg(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$, le triangle OBC est donc rectangle en O .



3. On a $\arg(z_B) = \frac{\pi}{4}$ et $\arg(z_C) = -\frac{\pi}{4}$ donc la droite (OA) est la bissectrice issue de O pour le triangle OBC .
4. Soit D l'image de O par la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre C , on a :

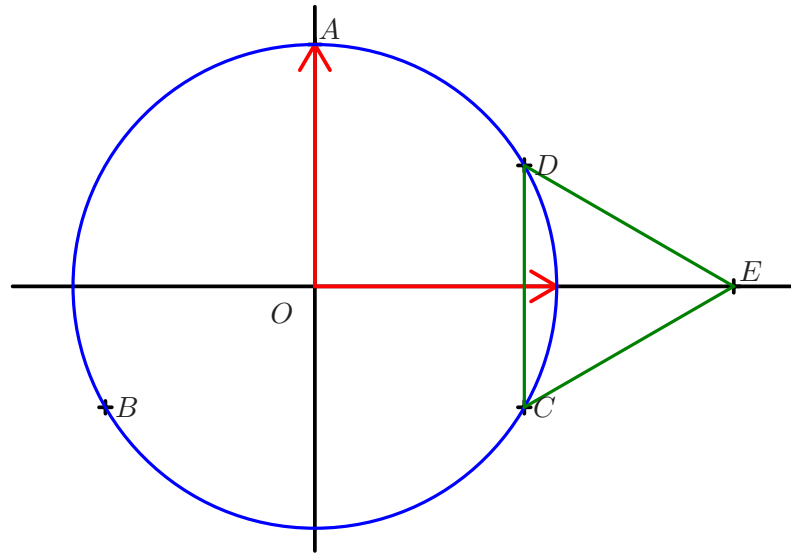
$$z_D - z_C = (z_O - z_C)e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

d'où $z_D = 1 - i + (-1 + i)(-i) = 2$.

5. Le quadrilatère $OCDB$ est un trapèze rectangle car les angles \widehat{BOC} et \widehat{OCD} sont droits.

Exercice 2

1. (a) On a $r : z \mapsto z_0 + (z - z_0)e^{i\frac{2\pi}{3}} = ze^{i\frac{2\pi}{3}}$.
- (b) On en déduit que $z_C = e^{-i\frac{5\pi}{6}} \times e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.
- (c) On a $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ et $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.
- (d) La figure est la suivante :



2. (a) On a :

$$z_D = \frac{2z_A - z_B + 2z_C}{2 + (-1) + 2} = \frac{2i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{1}{2}i}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

- (b) On a $z_D = e^{i\frac{\pi}{6}}$ d'où $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 1$ et les points A, B, C et D appartiennent donc au cercle trigonométrique.
3. (a) On a $h : z \mapsto z_A + 2(z - z_A) = 2z - i$.
- (b) On en déduit $z_E = 2 \times (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) - i = \sqrt{3}$.
4. (a) On a :

$$\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) - (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)}{(\sqrt{3}) - (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)} = \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

- (b) Le triangle CDE est donc équilatéral de côté 1.

Exercice 3

1. On suppose qu'il existe une fonction f vérifiant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = f(-x)f(x)$$

- (a) Pour tout nombre réel x , on a $f(-x)f'(x) = 1$ donc également $f(x)f'(-x) = 1 \neq 0$ donc $f(x) \neq 0$.
 (b) La fonction g est définie et dérivable sur \mathbb{R} et :

$$g'(x) = -1 \times f'(-x)f(x) + f(-x)f'(x) = -1 + 1 = 0$$

- (c) On en déduit que la fonction g est constante et pour tout nombre réel x , on a :

$$g(x) = g(0) = [f(0)]^2 = 16$$

- (d) D'après la question précédente, pour tout nombre réel x on a $f(-x)f(x) = 16$ d'où $f(x) = \frac{16}{f(-x)}$, de plus on a $f'(x) = \frac{1}{f(-x)}$ d'où $f'(x) = \frac{1}{16}f(x)$. La fonction f est solution de l'équation (E) et elle vérifie $f(0) = -4$.
2. Question de cours
- (a) Soit h une solution de l'équation (E), étudions à présent la fonction $k(x) = h(x)e^{-\frac{x}{16}}$. Cette fonction est dérivable et :

$$k'(x) = h'(x)e^{-\frac{x}{16}} - \frac{1}{16}h(x)e^{-\frac{x}{16}} = (h'(x) - \frac{1}{16}h(x))e^{-\frac{x}{16}} = 0$$

La fonction k est donc constante égale à K , on en déduit pour tout nombre réel x que $h(x) = Ke^{\frac{x}{16}}$.

- (b) De plus $K = h(0)$ donc il existe une unique solution h de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0, c'est la fonction $h(x) = -4e^{\frac{x}{16}}$.
3. On a donc montré que si f satisfait la condition C alors $f(x) = h(x) = -4e^{\frac{x}{16}}$. Comme la fonction h vérifie bien la condition (C) on a montré qu'il existe une seule fonction dérivable sur \mathbb{R} satisfaisant la condition (C), c'est la fonction $h(x) = -4e^{\frac{x}{16}}$.