Correction du devoir maison de Mathématiques n°4

Exercice 1

Partie A

1. (a) Posons $z = x \in \mathbb{R}$, alors :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = x^3 - (4+i)x^2 + (7+i)x - 4 = (x^3 - 4x^2 + 7x - 4) + i(-x^2 + x)$$

Ce complexe est nul si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont nulles :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^3 - 4x^2 + 7x - 4 & = & 0 \\ -x^2 + x & = & 0 \end{array}\right.$$

La deuxième équation a pour solutions $x = 0$ et $x = 1$ dont seule $x = 1$ est solution de la première équation. En conclusion, (E) admet une unique solution réelle $z_1 = 1$.

(b) On a :

$$(z - z_1)(z - 2 - 2i) = (z - 1)(z - 2 - 2i) = z^2 - (3+2i)z + (2+2i)$$

D'où :

$$(z-z_1)(z-2-2i)(az+b) = [z^2-(3+2i)z+(2+2i)][az+b] = az^3+[b-(3+2i)a]z^2+[(2+2i)a-(3+2i)b]z+(2+2i)b$$

et par identification :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b - (3+2i)a & = & -4 - i \\ (2+2i)a - (3+2i)b & = & 7 + i \\ (2+2i)b & = & -4 \end{array}\right. \quad \text{soit :} \quad \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & -1 + i \end{array}\right.$$

En conclusion, pour tout nombre complexe z, on a :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = (z-1)(z-2-2i)(z-1+i)$$

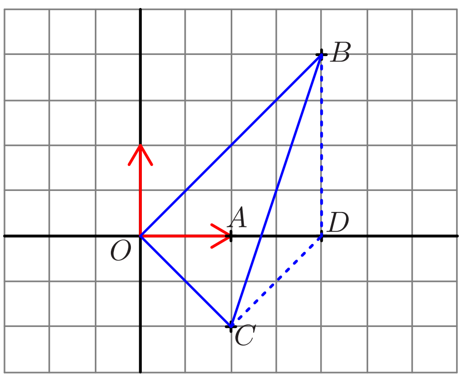
2. L'équation (E) a pour solutions $z_1 = 1$, $z_2 = 2 + 2i$ et $z_3 = 1 - i$.

Partie B

2. On a :

$$\frac{2+2i}{1-i} = \frac{(2+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{4i}{2} = 2i$$

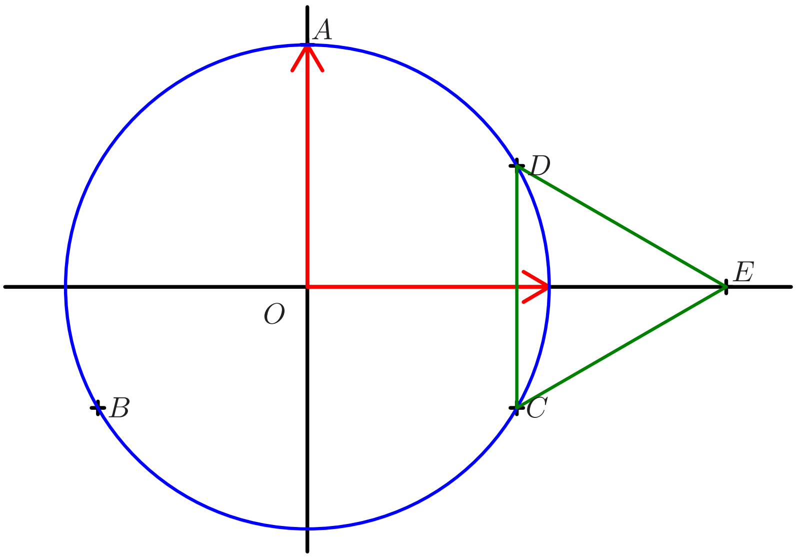
Le complexe $\dfrac{2+2i}{1-i}$ a pour module 2 et pour argument $\dfrac{\pi}{2}$, on en déduit que $\arg(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$, le triangle OBC est donc rectangle en O.



3. On a $\arg(z_B) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\arg(z_C) = -\dfrac{\pi}{4}$ donc la droite (OA) est la bissectrice issue de O pour le triangle OBC.
4. Soit D l'image de O par la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et de centre C, on a :
$$z_D - z_C = (z_O - z_C)e^{-i\frac{\pi}{2}}$$
d'où $z_D = 1 - i + (-1+i)(-i) = 2$.
5. Le quadrilatère $OCDB$ est un trapèze rectangle car les angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{OCD}$ sont droits.

Exercice 2

1. (a) On a $r : z \mapsto z_0 + (z - z_0)e^{i\frac{2\pi}{3}} = ze^{i\frac{2\pi}{3}}$.
   (b) On en déduit que $z_C = e^{-i\frac{5\pi}{6}} \times e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.
   (c) On a $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ et $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.
   (d) La figure est la suivante :



2. (a) On a :
$$z_D = \frac{2z_A - z_B + 2z_C}{2 + (-1) + 2} = \frac{2i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{1}{2}i}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$
   (b) On a $z_D = e^{i\frac{\pi}{6}}$ d'où $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 1$ et les points A, B, C et D appartiennent donc au cercle trigonométrique.
3. (a) On a $h : z \mapsto z_A + 2(z - z_A) = 2z - i$.
   (b) On en déduit $z_E = 2 \times (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) - i = \sqrt{3}$.
4. (a) On a :
$$\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) - (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)}{(\sqrt{3}) - (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)} = \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$
   (b) Le triangle CDE est donc équilatéral de côté 1.

Exercice 3

1. On suppose qu'il existe une fonction f vérifiant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = f(-x)f(x)$$
   (a) Pour tout nombre réel x, on a $f(-x)f'(x) = 1$ donc également $f(x)f'(-x) = 1 \neq 0$ donc $f(x) \neq 0$.

   (b) La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$g'(x) = -1 \times f'(-x)f(x) + f(-x)f'(x) = -1 + 1 = 0$$
   (c) On en déduit que la fonction g est constante et pour tout nombre réel x, on a :
$$g(x) = g(0) = [f(0)]^2 = 16$$
   (d) D'après la question précédente, pour tout nombre réel x on a $f(-x)f(x) = 16$ d'où $f(x) = \dfrac{16}{f(-x)}$, de plus on a $f'(x) = \dfrac{1}{f(-x)}$ d'où $f'(x) = \dfrac{1}{16}f(x)$. La fonction f est solution de l'équation (E) et elle vérifie $f(0) = -4$.

2. Question de cours

   (a) Soit h une solution de l'équation (E), étudions à présent la fonction $k(x) = h(x)e^{-\frac{x}{16}}$. Cette fonction est dérivable et :
$$k'(x) = h'(x)e^{-\frac{x}{16}} - \frac{1}{16}h(x)e^{-\frac{x}{16}} = (h'(x) - \frac{1}{16}h(x))e^{-\frac{x}{16}} = 0$$
   La fonction k est donc constante égale à K, on en déduit pour tout nombre réel x que $h(x) = Ke^{\frac{x}{16}}$.

   (b) De plus $K = h(0)$ donc il existe une unique solution h de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0, c'est la fonction $h(x) = -4e^{\frac{x}{16}}$.

3. On a donc montré que si f satisfait la condition C alors $f(x) = h(x) = -4e^{\frac{x}{16}}$. Comme la fonction h vérifie bien la condition (C) on a montré qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C), c'est la fonction $h(x) = -4e^{\frac{x}{16}}$.