

Devoir de Mathématiques n°4

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ avec 1 cm pour unité graphique.

1. Question de cours

On rappelle que pour tout vecteur \vec{w} non nul, d'affixe z , on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = (\vec{u}, \vec{w})$.

Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

(a) Démontrer que :

$$\arg\left(\frac{p-m}{n-m}\right) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}).$$

(b) Interpréter géométriquement le nombre $\left|\frac{p-m}{n-m}\right|$.

2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 4+i, z_B = 1+i, z_C = 5i$ et $z_D = -3-i$. Placer ces points sur une figure.

3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (1+2i)z - 2 - 4i$$

(a) Préciser les images des points A et B par f .

(b) Montrer que f admet un unique point invariant Ω , dont on précisera l'affixe ω .

4. (a) Montrer que pour tout nombre complexe z , on a :

$$z' - z = -2i(2 - i - z)$$

(b) En déduire, pour tout point M différent du point Ω , la valeur de $\frac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{M\Omega}; \overrightarrow{MM'})$.

Exercice 2

On désigne par f une fonction dérivable sur \mathbb{R} et par f' sa fonction dérivée. On considère les fonctions f qui vérifient les propriétés suivantes :

- (1) pour tout nombre réel x , $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$,
- (2) $f'(0) = 1$,
- (3) la fonction f' est dérivable sur \mathbb{R} .

1. Calculer $f(0)$.

2. Prouver que la fonction f' ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

3. En dérivant chaque membre de l'égalité de la propriété (1), démontrer que :

(4) pour tout nombre réel x , $f''(x) = f(x)$ où f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f .

4. On pose $u = f' + f$ et $v = f' - f$.

(a) Calculer $u(0)$ et $v(0)$.

(b) Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.

(c) En déduire les fonctions u et v .

(d) En déduire que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Problème

Partie A - Résolution de l'équation différentielle : (1) $y' - 2y = xe^x$

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur \mathbb{R} .
2. Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$u(x) = (ax + b)e^x$$

- (a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).
 - (b) Montrer que v est une solution de l'équation (2) si et seulement si, $u + v$ est solution de (1).
 - (c) En déduire l'ensemble des solutions de (1).
3. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Partie B - Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = 2e^x - x - 2$$

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Étudier le sens de variations de g , puis dresser son tableau de variations.
3. On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
 - (a) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.
 - (b) L'autre solution est appelée α . Montrer que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x .

Partie C - Étude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur)
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
3. Établir le tableau de variations de f .
4. Montrer que :

$$f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$$

où α est défini dans la partie B.

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$)