Devoir de Mathématiques n°4

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ avec 1 cm pour unité graphique.

1. Question de cours
   On rappelle que pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z, on a : $|z| = ||\vec{w}||$ et $\arg(z) = (\vec{u}, \vec{w})$.
   Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.
   (a) Démontrer que :
   $$\arg\left(\frac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right).$$
   (b) Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$.
2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 4 - i$, $z_B = 1 - i$, $z_C = -5i$ et $z_D = -3 + i$. Placer ces points sur une figure.
3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que :
   $$z' = (1-2i)z - 2 + 4i$$
   (a) Préciser les images des points A et B par f.
   (b) Montrer que f admet un unique point invariant Ω, dont on précisera l'affixe ω.
4. (a) Montrer que pour tout nombre complexe z, on a :
   $$z' - z = 2i(2 + i - z)$$
   (b) En déduire, pour tout point M différent du point Ω, la valeur de $\dfrac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{M\Omega}; \overrightarrow{MM'})$.

Exercice 2

On désigne par f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par f' sa fonction dérivée. On considère les fonctions f qui vérifient les propriétés suivantes :

(1) pour tout nombre réel x, $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$,
(2) $f'(0) = 1$,
(3) la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f(0)$.
2. Prouver que la fonction f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
3. En dérivant chaque membre de l'égalité de la propriété (1), démontrer que :
   (4) pour tout nombre réel x, $f''(x) = f(x)$ où f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f.
4. On pose $u = f + f'$ et $v = f - f'$.
   (a) Calculer $u(0)$ et $v(0)$.
   (b) Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.
   (c) En déduire les fonctions u et v.
   (d) En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Problème

Partie A - Résolution de l'équation différentielle : (1) $y' - 2y = -x\mathrm{e}^x$

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = (ax + b)\mathrm{e}^x$$

   (a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).
   (b) Montrer que v est une solution de l'équation (2) si et seulement si, $u + v$ est solution de (1).
   (c) En déduire l'ensemble des solutions de (1).
3. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Partie B - Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -2\mathrm{e}^x + x + 2$$

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Étudier le sens de variations de g, puis dresser son tableau de variations.
3. On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
   (a) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.
   (b) L'autre solution est appelée α. Montrer que $-1,6 \leqslant \alpha \leqslant -1,5$.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

Partie C - Étude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\mathrm{e}^{2x} + (x + 1)\mathrm{e}^x$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur)
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
3. Établir le tableau de variations de f.
4. Montrer que :

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$$

   où α est défini dans la partie B.
   En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6 \leqslant \alpha \leqslant -1,5$)