

Correction du devoir de Mathématiques n°4

Exercice 1

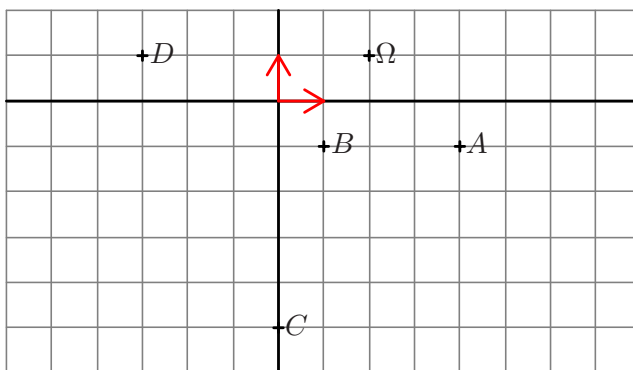
1. (a)

$$\arg\left(\frac{p-m}{n-m}\right) = \arg(p-m) - \arg(n-m) = \arg(z_{\overrightarrow{MP}}) - \arg(z_{\overrightarrow{MN}}) = (\vec{u}, \overrightarrow{MP}) - (\vec{u}, \overrightarrow{MN}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$$

(b)

$$\left|\frac{p-m}{n-m}\right| = \frac{|p-m|}{|n-m|} = \frac{|z_{\overrightarrow{MP}}|}{|z_{\overrightarrow{MN}}|} = \frac{MP}{MN}$$

2.



3. (a) $z_{A'} = (1-2i)(4-i) - 2 + 4i = -5i = z_C$ donc C est l'image de A par f .
 $z_{B'} = (1-2i)(1-i) - 2 + 4i = -3 + i = z_D$ donc D est l'image de B par f .

(b) Ω est invariant par f si et seulement si $f(\omega) = \omega$ soit :

$$\begin{aligned} \omega &= (1-2i)\omega - 2 + 4i \\ 2i\omega &= -2 + 4i \\ \omega &= \frac{-2 + 4i}{2i} = \frac{(-2 + 4i) \times (-2i)}{(2i) \times (-2i)} = \frac{4i + 8}{4} = 2 + i \end{aligned}$$

4. (a)

$$z' - z = (1-2i)z - 2 + 4i - z = -2iz - 2 + 4i = 2i(2 + i - z)$$

(b) On en déduit que :

$$z' - z = 2i(\omega - z)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{MM'}{\Omega M} &= \left| \frac{z' - z}{\omega - z} \right| = |2i| = 2 \\ (\overrightarrow{M\Omega}; \overrightarrow{MM'}) &= \arg\left(\frac{z' - z}{\omega - z}\right) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Exercice 2

1. D'après (1) et (2), on a $[f(0)]^2 = [f'(0)]^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$ donc $f(0) = 0$.
2. De plus, on a $[f'(x)]^2 = 1 + [f(x)]^2 > 0$ donc f' ne s'annule pas.
3. En dérivant chaque membre de l'égalité de la propriété (1), on a :

$$2f'(x) \times f''(x) - 2f(x) \times f'(x) = 0$$

soit :

$$2f'(x)(f''(x) - f(x)) = 0$$

or f' ne s'annule pas donc pour tout nombre réel x , $f''(x) = f(x)$.

4. (a) On a $u(0) = f(0) + f'(0) = 0 + 1 = 1$ et $v(0) = f(0) - f'(0) = 0 - 1 = -1$.
- (b) On a $u' = f' + f'' = f' + f = u$ et $v' = f' - f'' = f' - f = -v$.
- (c) La fonction u est donc de la forme Ce^x et comme $u(0) = 1$ on a $u(x) = e^x$. La fonction v est de la forme Ce^{-x} et comme $v(0) = -1$ on a $v(x) = -e^{-x}$.
- (d) On a pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{u(x) + v(x)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Problème

Partie A

1. Les solutions de l'équation (1) sont de la forme $y(x) = Ce^{2x}$.
2. (a) $u(x) = (ax + b)e^x$ est solution de l'équation (2) si et seulement si :

$$\begin{aligned} u'(x) - 2u(x) &= -xe^x \\ ae^x + (ax + b)e^x - 2(ax + b)e^x &= -xe^x \\ ((-a + 1)x + (a - b))e^x &= 0 \\ (-a + 1)x + (a - b) &= 0 \\ (a, b) &= (1, 1) \end{aligned}$$

soit $u(x) = (x + 1)e^x$.

- (b) v est une solution de l'équation (2) si et seulement si :

$$\begin{aligned} v'(x) - 2v(x) &= 0 \\ v'(x) - 2v(x) &= -xe^x - (u'(x) - 2u(x)) \\ (u + v)'(x) - 2(u + v)(x) &= -xe^x \end{aligned}$$

c'est à dire si et seulement si $u + v$ est solution de (1).

- (c) Les solutions de (1) sont donc de la forme $u(x) + Ce^{2x} = Ce^{2x} + (x + 1)e^x$.

3. La solution de l'équation (1) qui s'annule en 0 est $f(x) = -e^{2x} + (x + 1)e^x$.

Partie B

1. On a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty$$

de plus :

$$g(x) = e^x \left(-2 + \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} \right)$$

d'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = -\infty$$

2. La fonction g est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = -2e^x + 1$ d'où :

x	$- \ln 2$
$g'(x)$	+ 0 -
$g(x)$	$1 - \ln 2$ \nearrow \searrow

3. On a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = -\infty$ et $1 - \ln 2 > 0$, la fonction g étant continue et strictement monotone sur les intervalles $] -\infty; -\ln 2]$ et $[-\ln 2; +\infty[$ le théorème des valeurs intermédiaires implique l'existence de deux solutions $\alpha \in] -\infty; -\ln 2]$ et $\beta \in [-\ln 2; +\infty[$ à l'équation $g(x) = 0$.

(a) On a $g(0) = 0$ donc $\beta = 0$.

(b) On a $g(-1,6) \simeq -0,0038 > 0$ et $g(-1,5) \simeq 0,0537 < 0$ donc $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.

4.

x	α	0
$g(x)$	- 0 + 0 -	

Partie C

1. On a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 0$$

de plus :

$$f(x) = -e^{2x} \left(1 - \frac{x+1}{e^x} \right)$$

d'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{2x}) = -\infty$$

2. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$f'(x) = -2e^{2x} + [1 + e^x + (x+1)e^x] = -2e^{2x} + (x+2)e^x = e^x g(x)$$

3. On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	α	0
$f'(x)$	- 0 + 0 -	
$f(x)$	\searrow \nearrow \searrow $f(\alpha)$	0

4. On a $g(\alpha) = 0$ d'où $e^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{2}$, par conséquent :

$$f(\alpha) = -\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + (\alpha+1) \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) = \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \left(-1 - \frac{\alpha}{2} + \alpha + 1\right) = \frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$$

On montre que la fonction $\phi(x) = \frac{x^2 + 2x}{4}$ est décroissante sur l'intervalle $[-1,6; -1,5]$ d'où :

$$\begin{aligned} \phi(-1,5) &\leq f(\alpha) \leq \phi(-1,6) \\ -0,1875 &\leq f(\alpha) \leq -0,16 \end{aligned}$$