

Devoir de Mathématiques

Exercice 1

1. Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soit R la rotation du plan de centre Ω , d'affixe ω et d'angle de mesure θ . L'image par R d'un point du plan est donc définie de la manière suivante :
 - $R(\Omega) = \Omega$;
 - pour tout point M du plan, distinct de Ω , l'image M' de M est définie par $\Omega M' = \Omega M$ et $(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) = \theta[2\pi]$.

On rappelle que, pour des points A et B d'affixes respectives a et b :

$$AB = |b - a| \quad \text{et} \quad (\vec{u}, \vec{AB}) = \arg(b - a) [2\pi].$$

Question : Montrer que les affixes z et z' d'un point quelconque M du plan et de son image M' par la rotation R sont liées par la relation :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

2. On considère les points I et B d'affixes respectives $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 2 + 2i$. Soit R la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.
 - (a) Donner l'écriture complexe de R .
 - (b) Soit A l'image de I par R . Calculer l'affixe z_A de A .
 - (c) Montrer que O , A et B sont sur un même cercle de centre I . En déduire que OAB est un triangle rectangle en A . Donner une mesure de l'angle (\vec{OA}, \vec{OB}) .
 - (d) En déduire une mesure de l'angle (\vec{u}, \vec{OA}) .
3. Soit T la translation de vecteur \vec{IO} . On pose $A' = T(A)$.
 - (a) Calculer l'affixe $z_{A'}$ de A' .
 - (b) Quelle est la nature du quadrilatère $OIAA'$?
 - (c) Montrer que $-\frac{\pi}{12}$ est un argument de $z_{A'}$.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = e^{-x}.$$

1. Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par la relation $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E) .
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + y = 0$.
3. Démontrer qu'une fonction v , définie et dérivable sur \mathbb{R} , est solution de (E) si, et seulement si, $v - u$ est solution de (E_0) .
4. En déduire toutes les solutions de (E) .
5. Déterminer la fonction f_2 , solution de (E) , qui prend la valeur 2 en 0.