Devoir de Mathématiques

Exercice 1

1. *Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances.* Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Soit R la rotation du plan de centre Ω, d'affixe ω et d'angle de mesure θ. L'image par R d'un point du plan est donc définie de la manière suivante :
   – $R(\Omega) = \Omega$;
   – pour tout point M du plan, distinct de Ω, l'image M' de M est définie par $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta[2\pi]$.
   On rappelle que, pour des points A et B d'affixes respectives a et b :
   $$AB = |b - a| \text{ et } (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}) = \mathrm{b - a}\ [2\pi].$$
   Question : Montrer que les affixes z et z' d'un point quelconque M du plan et de son image M' par la rotation R sont liées par la relation :
   $$z' - \omega = \mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega).$$
2. On considère les points I et B d'affixes respectives $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 2 + 2i$. Soit R la rotation de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$.
   (a) Donner l'écriture complexe de R.
   (b) Soit A l'image de I par R. Calculer l'affixe z_A de A.
   (c) Montrer que O, A et B sont sur un même cercle de centre I. En déduire que OAB est un triangle rectangle en A. Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
   (d) En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA})$.
3. Soit T la translation de veteur $\overrightarrow{IO}$. On pose $A' = T(A)$.
   (a) Calculer l'affixe $z_{A'}$ de A'.
   (b) Quelle est la nature du quadrilatère $OIAA'$?
   (c) Montrer que $-\dfrac{\pi}{12}$ est un argument de $z_{A'}$.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par la relation $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + y = 0$.
3. Démontrer qu'une fonction v, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si, et seulement si, $v - u$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de (E).
5. Déterminer la fonction f_2, solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0.