Fonctions exponentielles - Fonctions logarithmes

1 Fonctions exponentielles

Définition 1. *Soit a un réel strictement positif, on appelle* fonction exponentielle de base a*, la fonction* $\exp_a$ *définie par* $\exp_a(x) = e^{x \ln a}$.

1. (a) Montrer que $\exp_e = \exp$ et que $\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$ pour x et y réels.
   (b) Montrer que $\exp_a(n) = a^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, en déduire une autre notation possible pour $\exp_a(x)$.
   (c) Montrer que la fonction $\exp_a$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\exp_a'$.
   (d) En déduire les variations de la fonction $\exp_a$ suivant les valeurs de a.
2. (a) Montrer que l'équation $x^n = y_0$ admet une unique solution positive x_0 pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $y_0 \geqslant 0$.
   (b) Montrer que si $y_0 > 0$ alors $x_0 = {y_0}^{\frac{1}{n}}$.

2 Fonctions logarithmes

Définition 2. *Soit a un réel strictement positif différent de 1, on appelle* fonction logarithme de base a*, la fonction* $\log_a$ *définie par* $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

1. Montrer que $\log_e = \ln$ et que $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ pour x et y réels et strictement positifs.
2. (a) Montrer que l'équation $a^x = y_0$ admet une unique solution x_0 pour y_0 strictement positif et a strictement positif différent de 1.
   (b) Montrer que $x_0 = \log_a(y_0)$.