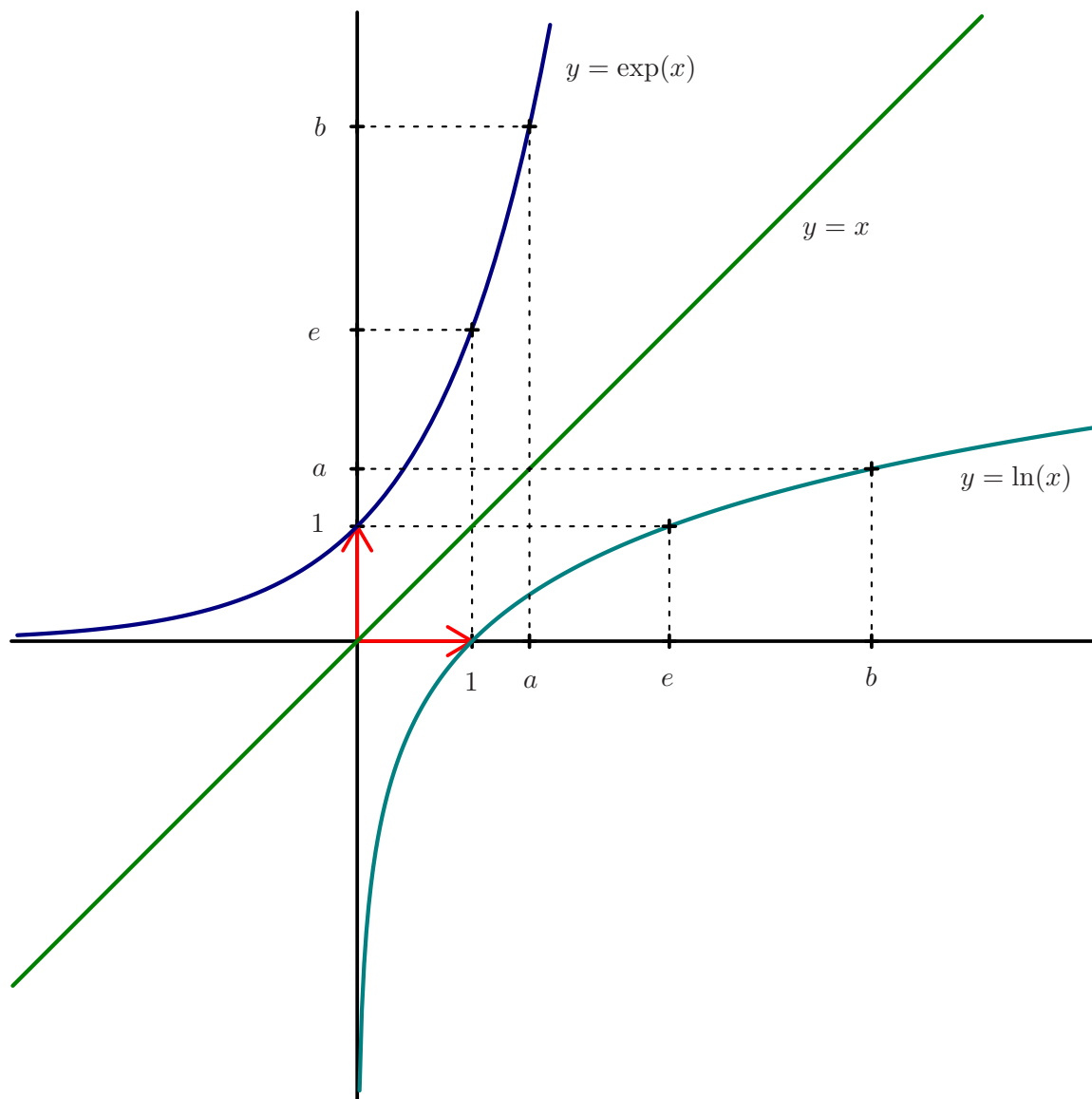


Fonction logarithme népérien

Définition 1. Pour tout réel $b \in]0; +\infty[$, l'équation $e^a = b$ admet une unique solution réelle a , on la note $a = \ln(b)$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ définie sur $]0; +\infty[$ est appelée fonction logarithme népérien, c'est la fonction réciproque de l'exponentielle.



Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Propriété 1.

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on a $\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$.
2. $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\ln(e^x) = x$.
4. Pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a $e^{\ln(y)} = y$.

1 Relation fonctionnelle caractérisant la fonction logarithme népérien

Lemme 1. Pour tous réels α et β , on a $\alpha = \beta \Leftrightarrow \exp(\alpha) = \exp(\beta)$.

Démonstration. au programme. □

Propriété 2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

Démonstration. au programme. □

Propriété 3. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Démonstration. au programme. □

Corollaire 1. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

Démonstration. au programme. □

Corollaire 2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$ on a $\ln(x^n) = n \ln(x)$ et $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$.

Démonstration. au programme. □

2 Étude de la fonction logarithme népérien

Théorème 1. La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Démonstration. On admet continuité et dérivabilité et on étudie la fonction $g(x) = \exp[\ln(x)]$. □

Corollaire 3. Les primitives de la fonction inverse sur l'intervalle $]0; +\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto \ln(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$. La fonction logarithme népérien est l'unique primitive de la fonction inverse sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.

Démonstration. au programme. □

Corollaire 4. Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur \mathbb{R} alors la fonction $f(x) = \ln[u(x)]$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Démonstration. au programme. □

Corollaire 5. La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Démonstration. au programme. □

Propriété 4.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Démonstration. au programme. □

Propriété 5.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Démonstration. au programme en montrant que $\ln x < \sqrt{x}$ pour $x > 0$. □