Démonstration par récurrence

Définition. *Une propriété dépendant d'un entier naturel est* héréditaire *lorsque si elle est vraie pour un certain rang n alors elle est vraie pour le rang $n+1$.*

Axiome. *On considère une propriété dépendant d'un entier naturel. Si cette propriété est vraie pour le rang n_0 et héréditaire, alors elle est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$.*

Exemples

1. On considère la propriété (P_n) : $4^n + 2$ est un multiple de 3.
   (a) Montrer que la propriété est vraie pour le rang $n = 0$.
   (b) On suppose que la propriété est vraie pour le rang n et on pose $4^n + 2 = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'alors la propriété est vraie pour le rang $n+1$. (On pourra chercher à exprimer $4^{n+1} + 2$ en fonction de k)
   (c) Montrer que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On considère la propriété (P_n) : $8^n + 1$ est un multiple de 7.
   (a) Montrer que la propriété P_n est héréditaire.
   (b) Que peut-on en déduire ?

Application

Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

Propriété 1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a* $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Propriété 2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre* $\dfrac{n(n+1)}{2}$ *est un entier naturel.*

Propriété 3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a* $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Propriété 4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto nx^{n-1}$.*

Propriété 5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction sinus est n fois dérivable et on a* $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$.

Propriété 6. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on a* $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.