Somme des puissances des n premiers entiers

1. On considère la somme $\boxed{S_1(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n}$, $n \geqslant 1$.

   (a) Montrer que $S_1(n+1) - S_1(n) = n + 1$ pour $n \geqslant 1$.

   (b) On considère la relation fonctionnelle $f(x+1) - f(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
   - Montrer qu'il n'existe pas de fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 1 vérifiant cette relation.
   - Montrer qu'il existe des fonctions polynômes de degré 2 vérifiant cette relation et déterminer leurs coefficients.

   (c) En déduire une formule explicite pour $S_1(n)$ que l'on démontrera par récurrence, on pourra utiliser la question 1.(a).

2. On considère la somme $\boxed{S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}$, $n \geqslant 1$.

   Déterminer une formule explicite pour $S_2(n)$, on pourra étudier la relation fonctionnelle $f(x+1) - f(x) = (x+1)^2$.

3. On considère la somme $\boxed{S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}$, $n \geqslant 1$.

   Déterminer une formule explicite pour $S_3(n)$.

4. On considère la somme $\boxed{S_4(n) = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4}$, $n \geqslant 1$.

   (a) Montrer que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie la relation fonctionnelle $f(x+1) - f(x) = (x+1)^4$, alors la fonction $\frac{1}{4}f'$ vérifie la relation fonctionnelle $f(x+1) - f(x) = (x+1)^3$.

   (b) En déduire les fonctions polynômes solution de l'équation fonctionnelle $f(x+1) - f(x) = (x+1)^4$.

   (c) Déterminer une formule explicite pour $S_4(n)$.

5. On considère la somme $\boxed{S_5(n) = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5}$, $n \geqslant 1$.

   Déterminer une formule explicite pour $S_5(n)$.