Série Harmonique - Constante d'Euler

Série Harmonique

Définition. *On appelle* série harmonique*, la suite définie par :*

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$$

1. Calculer h_1, h_2, h_3, h_4 et h_5.
2. (a) Montrer par récurrence que $h_{2n} \geqslant h_n + \dfrac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) En déduire que la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ diverge.

Constante d'Euler

On définit la suite d'Euler par $e_n = h_n - \ln(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $e_{n+1} - e_n = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in [0;1[$, on a $\ln(1-x) \leqslant -x$.
   (c) En déduire que la suite $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in [0;1]$, on a $\ln(1+x) \leqslant x$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   (c) Montrer par récurrence que $\ln(n) \leqslant h_{n-1}$, $n \geqslant 2$.
   (d) En déduire que la suite $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est positive et convergente.
3. On pose $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = \gamma$ (constante d'Euler).
   (a) Montrer que la suite $u_n = e_n - \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ est croissante.
   (b) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(e_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
   (c) Déterminer un encadrement au dixième de γ.