

Suites numériques

Définition 1. Une suite réelle (u) est une fonction de \mathbb{N} ou d'une partie de \mathbb{N} dans \mathbb{R} . On appelle terme de rang n de la suite le nombre réel $u_n = u(n)$.

Exemple 1.

1. $u_n = n^2 + 1$, $n \geq 0$ est une suite définie sous forme explicite
2. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = (u_n)^2 + 1, n \geq 0 \end{cases}$ est une suite définie sous forme récurrente.

Définition 2. Une propriété dépendant d'un entier naturel est héréditaire lorsque si elle est vraie pour un certain rang n alors elle est vraie pour le rang $n + 1$.

Axiome 1. On considère une propriété dépendant d'un entier naturel. Si cette propriété est vraie pour le rang n_0 et héréditaire, alors elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Exercice 1. Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=1}^{k=n} k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Définition 3.

1. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est majorée si il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \geq 0$.
2. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est minorée si il existe un réel m tel que $u_n \geq m$ pour tout $n \geq 0$.
3. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est bornée si elle est minorée et majorée.

Exemple 2. La suite $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$, $n \geq 0$ est bornée.

Définition 4.

1. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est constante si $u_{n+1} = u_n$ pour tout $n \geq 0$.
2. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \geq 0$.
3. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq 0$.
4. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Exemple 3. La suite $u_n = 3n + 4$ est croissante. (on pourra utiliser la croissance de la fonction $f(x) = 3x + 4$)

Propriété 1.

1. Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante si et seulement si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$.
2. Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante si et seulement si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \geq 0$.
3. Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ strictement positive est croissante si et seulement si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ pour tout $n \geq 0$.
4. Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ strictement positive est décroissante si et seulement si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ pour tout $n \geq 0$.

Démonstration. au programme. □

Définition 5. Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est dite convergente vers un réel l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un rang n_0 . Une suite qui ne converge pas est dite divergente

Exemple 4.

La suite $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$, $n \geq 0$ converge vers 2.

La suite $u_n = n^2 + 1$, $n \geq 0$ diverge.

La suite $u_n = (-1)^n$, $n \geq 0$ diverge.

Propriété 2. Si une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge alors il existe un unique réel l vers lequel elle converge, l est appelé limite de la suite (u_n) et on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

Démonstration. au programme en raisonnant par l'absurde. □

Théorème 1. Une suite convergente est bornée.

Démonstration. au programme. □

La réciproque de ce théorème est fautive !

Contre-exemple 1. La suite bornée $u_n = (-1)^n$, $n \geq 0$ diverge.

On peut cependant énoncer le théorème suivant :

Théorème 2. Théorème de convergence monotone

1. Une suite croissante majorée converge.
2. Une suite décroissante minorée converge.

Démonstration. admis. □

Définition 6.

1. Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ diverge vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, $A \in \mathbb{R}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0 . On note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

2. Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ diverge vers $-\infty$ si tout intervalle de la forme $] -\infty; A[$, $A \in \mathbb{R}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0 . On note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

Exemple 5. La suite $u_n = n^2 + 1$, $n \geq 0$ diverge vers $+\infty$.

Propriété 3.

1. Une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.
2. Une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Démonstration. au programme. □

Définition 7. Les suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont dites adjacentes si :

- (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.
- la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

Exemple 6. Les suites $u_n = 2 - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ et $v_n = 2 + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ sont adjacentes.

Propriété 4. Si deux suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 0$.

Démonstration. au programme en raisonnant par l'absurde et en utilisant un passage à la limite. □

Propriété 5. Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.

Démonstration. au programme en utilisant le théorème de convergence monotone. □