

## Suites numériques

**Définition 1.** Une suite réelle  $(u)$  est une fonction de  $\mathbb{N}$  ou d'une partie de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ . On appelle terme de rang  $n$  de la suite le nombre réel  $u_n = u(n)$ .

**Exemple 1.**

1.  $u_n = n^2 + 1$ ,  $n \geq 0$  est une suite définie sous forme explicite
2.  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = (u_n)^2 + 1, n \geq 0 \end{cases}$  est une suite définie sous forme récurrente.

**Définition 2.** Une propriété dépendant d'un entier naturel est héréditaire lorsque si elle est vraie pour un certain rang  $n$  alors elle est vraie pour le rang  $n + 1$ .

**Axiome 1.** On considère une propriété dépendant d'un entier naturel. Si cette propriété est vraie pour le rang  $n_0$  et héréditaire, alors elle est vraie pour tout entier naturel  $n \geq n_0$ .

**Exercice 1.** Prouver par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\sum_{k=1}^{k=n} k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

**Définition 3.**

1. La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est majorée si il existe un réel  $M$  tel que  $u_n \leq M$  pour tout  $n \geq 0$ .
2. La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est minorée si il existe un réel  $m$  tel que  $u_n \geq m$  pour tout  $n \geq 0$ .
3. La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est bornée si elle est minorée et majorée.

**Exemple 2.** La suite  $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ ,  $n \geq 0$  est bornée.

**Définition 4.**

1. La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est constante si  $u_{n+1} = u_n$  pour tout  $n \geq 0$ .
2. La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante si  $u_{n+1} \geq u_n$  pour tout  $n \geq 0$ .
3. La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est décroissante si  $u_{n+1} \leq u_n$  pour tout  $n \geq 0$ .
4. La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est monotone si elle est croissante ou décroissante.

**Exemple 3.** La suite  $u_n = 3n + 4$  est croissante. (on pourra utiliser la croissance de la fonction  $f(x) = 3x + 4$ )

**Propriété 1.**

1. Une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante si et seulement si  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  pour tout  $n \geq 0$ .
2. Une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est décroissante si et seulement si  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  pour tout  $n \geq 0$ .
3. Une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  strictement positive est croissante si et seulement si  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$  pour tout  $n \geq 0$ .
4. Une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  strictement positive est décroissante si et seulement si  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$  pour tout  $n \geq 0$ .

Démonstration. au programme. □

**Définition 5.** Une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est dite convergente vers un réel  $l$  si tout intervalle ouvert contenant  $l$  contient tous les termes de la suite à partir d'un rang  $n_0$ . Une suite qui ne converge pas est dite divergente

**Exemple 4.**

La suite  $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ ,  $n \geq 0$  converge vers 2.

La suite  $u_n = n^2 + 1$ ,  $n \geq 0$  diverge.

La suite  $u_n = (-1)^n$ ,  $n \geq 0$  diverge.

**Propriété 2.** Si une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge alors il existe un unique réel  $l$  vers lequel elle converge,  $l$  est appelé limite de la suite  $(u_n)$  et on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

*Démonstration.* au programme en raisonnant par l'absurde. □

**Théorème 1.** Une suite convergente est bornée.

*Démonstration.* au programme. □

La réciproque de ce théorème est fautive !

**Contre-exemple 1.** La suite bornée  $u_n = (-1)^n$ ,  $n \geq 0$  diverge.

On peut cependant énoncer le théorème suivant :

**Théorème 2.** Théorème de convergence monotone

1. Une suite croissante majorée converge.
2. Une suite décroissante minorée converge.

*Démonstration.* admis. □

**Définition 6.**

1. Une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  diverge vers  $+\infty$  si tout intervalle de la forme  $]A; +\infty[$ ,  $A \in \mathbb{R}$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang  $n_0$ . On note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

2. Une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  diverge vers  $-\infty$  si tout intervalle de la forme  $] -\infty; A[$ ,  $A \in \mathbb{R}$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang  $n_0$ . On note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

**Exemple 5.** La suite  $u_n = n^2 + 1$ ,  $n \geq 0$  diverge vers  $+\infty$ .

**Propriété 3.**

1. Une suite croissante non majorée diverge vers  $+\infty$ .
2. Une suite décroissante non minorée diverge vers  $-\infty$ .

*Démonstration.* au programme. □

**Définition 7.** Les suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  sont dites adjacentes si :

- $(u_n)$  est croissante et  $(v_n)$  décroissante.
- la suite  $(v_n - u_n)$  converge vers 0.

**Exemple 6.** Les suites  $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ ,  $n \geq 1$  et  $v_n = 2 + \frac{1}{n}$ ,  $n \geq 1$  sont adjacentes.

**Propriété 4.** Si deux suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  sont adjacentes avec  $(u_n)$  croissante et  $(v_n)$  décroissante alors  $u_n \leq v_n$  pour tout  $n \geq 0$ .

*Démonstration.* au programme en raisonnant par l'absurde et en utilisant un passage à la limite. □

**Propriété 5.** Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.

*Démonstration.* au programme en utilisant le théorème de convergence monotone. □