Devoir maison de Mathématiques n°5

Problème 1*

Préliminaire : démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout réel $\alpha > -1$, on a :

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha \qquad \text{(inégalité de Bernoulli)}$$

Soit x un réel quelconque et n_0 un entier tel que $n_0 > |x| + 1$, on définit les suites :

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \quad \text{pour } n \geqslant n_0$$

1. Démontrer que les suites $(u_n(x))_{n \geqslant n_0}$ et $(v_n(x))_{n \geqslant n_0}$ sont strictement positives.
2. Démontrer que $\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \left(1 - \dfrac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^n \left(1 + \dfrac{x}{n+1}\right)$, en déduire en utilisant l'inégalité de Bernoulli que la suite $(u_n(x))$ est croissante.
3. Montrer que $v_n(x) = \dfrac{1}{u_n(-x)}$, en déduire que la suite $(v_n(x))$ est décroissante.
4. (a) Montrer en utilisant l'inégalité de Bernoulli que $1 - \dfrac{x^2}{n} \leqslant \dfrac{u_n(x)}{v_n(x)} \leqslant 1$.
   (b) En déduire que $0 \leqslant v_n(x) - u_n(x) \leqslant \dfrac{x^2 v_n(x)}{n}$.
   (c) En déduire que les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont adjacentes et convergent vers un réel $l(x)$.
5. Montrer que $l(0) = 1$.
6. (a) Soit h un réel, démontrer que $u_n(x+h) = u_n(x)\left(1 + \dfrac{h}{n+x}\right)^n$.
   (b) En déduire en utilisant l'inégalité de Bernoulli que pour n suffisamment grand :
   $$u_n(x+h) \geqslant u_n(x)\left(1 + \frac{nh}{n+x}\right)$$
   (c) En déduire que $l(x+h) \geqslant l(x)(1+h)$.
7. (a) En remplaçant h par $-h$ puis x par $x+h$ dans (6c), montrer que $l(x) \geqslant l(x+h)(1-h)$.
   (b) En déduire que $l(x+h) \leqslant \dfrac{l(x)}{1-h}$ pour $h < 1$.
8. (a) Déduire de (6c) et (7b) un encadrement de $\dfrac{l(x+h) - l(x)}{h}$ dans les cas $1 > h > 0$ et $h < 0$.
   (b) En déduire que la fonction $x \mapsto l(x)$ est dérivable et que $l'(x) = l(x)$.
   (c) De quelle fonction vient-on de prouver l'existence ?

Problème 2**

On considère un réel $a > 0$ et on définit la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ par :

$$u_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}} \qquad (a \text{ est présent } n \text{ fois sous les radicaux})$$

Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Problème 3**

On considère une suite réelle $(u_n)_{n \geqslant 0}$ et on définit la suite $(v_n)_{n \geqslant 0}$ par :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

Démontrer que si la suite (u_n) converge vers l alors la suite (v_n) converge aussi vers l. La réciproque est-elle vraie ?