

Devoir de Mathématiques n°5

Exercice 1 (5 points)

Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples. Pour chacune des affirmations ci-dessous indiquer si elle est vraie ou fausse (aucune justification n'est demandée). Une réponse juste rapporte un point, une réponse erronée enlève un demi-point, l'absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point. Un total de points négatif est ramené à zéro.

On considère une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ dont aucun terme n'est nul et on définit la suite $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

1. Si (u_n) est croissante alors (v_n) est décroissante.
2. Si (u_n) est convergente alors (v_n) est convergente.
3. Si (u_n) est minorée par 2 alors (v_n) est minorée par -1 .
4. Si (u_n) est divergente alors (v_n) converge vers 0.
5. Si (v_n) converge vers 0 alors (u_n) est divergente.

Exercice 2 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n , on a $u_n > n^2$.
(b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
3. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Exercice 3 (10 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 , v_1 , u_2 et v_2 .
2. On considère la suite $(w_n)_{n \geq 0}$ définie par $w_n = v_n - u_n$.
(a) Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
(b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n) .
3. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
4. On considère la suite $(t_n)_{n \geq 0}$ définie par $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.
(a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.
(b) En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n) .