Devoir de Mathématiques n°5

Exercice 1 (5 points)

Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples. Pour chacune des affirmations ci-dessous indiquer si elle est vraie ou fausse (aucune justification n'est demandée). Une réponse juste rapporte un point, une réponse erronée enlève un demi-point, l'absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point. Un total de points négatif est ramené à zéro.

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ dont aucun terme n'est nul et on définit la suite $v_n = \dfrac{1}{{u_n}^2}$.

1. Si (u_n) est croissante alors (v_n) est décroissante.
2. Si (u_n) est convergente alors (v_n) est convergente.
3. Si (u_n) est minorée par 2 alors (v_n) est minorée par $\dfrac{1}{4}$.
4. Si (u_n) est divergente alors (v_n) converge vers 0.
5. Si (v_n) converge vers 0 alors (u_n) est divergente.

Exercice 2 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 4n + 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant n^2$.
   (b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
3. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Exercice 3 (10 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.
2. On considère la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $w_n = u_n - v_n$.
   (a) Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.
   (b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).
3. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
4. On considère la suite $(t_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.
   (a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.
   (b) En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).