

## Devoir de Mathématiques n°5

**Exercice 1 (5 points)**

Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples. Pour chacune des affirmations ci-dessous indiquer si elle est vraie ou fausse (aucune justification n'est demandée). Une réponse juste rapporte un point, une réponse erronée enlève un demi-point, l'absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point. Un total de points négatif est ramené à zéro.

On considère une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  dont aucun terme n'est nul et on définit la suite  $v_n = \frac{1}{u_n^2}$ .

1. Si  $(u_n)$  est croissante alors  $(v_n)$  est décroissante.
2. Si  $(u_n)$  est convergente alors  $(v_n)$  est convergente.
3. Si  $(u_n)$  est minorée par 2 alors  $(v_n)$  est minorée par  $\frac{1}{4}$ .
4. Si  $(u_n)$  est divergente alors  $(v_n)$  converge vers 0.
5. Si  $(v_n)$  converge vers 0 alors  $(u_n)$  est divergente.

**Exercice 2 (5 points)**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 4n + 2 \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n \geq n^2$ .  
(b) Quelle est la limite de la suite  $(u_n)$  ?
3. Conjecturer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

**Exercice 3 (10 points)**

On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Calculer  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $u_2$  et  $v_2$ .
2. On considère la suite  $(w_n)_{n \geq 0}$  définie par  $w_n = u_n - v_n$ .  
(a) Montrer que la suite  $(w_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{4}$ .  
(b) Exprimer  $w_n$  en fonction de  $n$  et préciser la limite de la suite  $(w_n)$ .
3. Démontrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.
4. On considère la suite  $(t_n)_{n \geq 0}$  définie par  $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ .  
(a) Démontrer que la suite  $(t_n)$  est constante.  
(b) En déduire les limites des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .