Correction du devoir de Mathématiques n°5

Exercice 1

1. FAUX : Si $u_0 = -2$ et $u_1 = 1$ alors $v_0 = \dfrac{1}{4}$ et $v_1 = 1$ et $v_0 < v_1$.
2. FAUX : Si $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ (convergente vers 0) alors $v_n = (n+1)^2$ (divergente vers $+\infty$).
3. FAUX : Si $u_0 = 3 \geqslant 2$ alors $v_0 = \dfrac{1}{9} < \dfrac{1}{4}$.
4. FAUX : Si $u_n = (-1)^n$ (divergente) alors $v_n = 1$ (convergente vers 1).
5. VRAI : Si (v_n) converge vers 0 alors $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{v_n}}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 2

1. $u_{n+1} - u_n = 4n + 2 > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.
2. (a) Initialisation : $u_0 = 0 \geqslant 0^2$.
   Hérédité : $u_{n+1} = u_n + 4n + 2 > n^2 + 4n + 2 = (n+1)^2 + 2n + 1 > (n+1)^2$.
   (b) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
3. On démontre par récurrence que $u_n = 2n^2$.
   Initialisation : $u_0 = 0 = 2 \times 0^2$.
   Hérédité : $u_{n+1} = u_n + 4n + 2 = 2n^2 + 4n + 2 = 2(n+1)^2$.

Exercice 3

1. $u_1 = \dfrac{u_0 + v_0}{2} = \dfrac{4+3}{2} = \dfrac{7}{2}$, $\quad v_1 = \dfrac{u_1 + v_0}{2} = \dfrac{\frac{7}{2}+3}{2} = \dfrac{13}{4}$,
   $u_2 = \dfrac{u_1 + v_1}{2} = \dfrac{\frac{7}{2}+\frac{13}{4}}{2} = \dfrac{27}{8}$, $\quad v_2 = \dfrac{u_2 + v_1}{2} = \dfrac{\frac{27}{8}+\frac{13}{4}}{2} = \dfrac{53}{16}$.
2. (a) $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} = \dfrac{u_{n+1}}{2} - \dfrac{v_n}{2} = \dfrac{u_n + v_n}{4} - \dfrac{v_n}{2} = \dfrac{u_n - v_n}{4} = \dfrac{1}{4} w_n$.
   (b) $w_n = w_0 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.
3. On a prouvé que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$, de plus (u_n) est décroissante et (v_n) croissante :
   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2} = -\dfrac{w_n}{2} \leqslant 0$.
   $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n = \dfrac{u_{n+1}}{2} - \dfrac{v_n}{2} = \dfrac{u_n + v_n}{4} - \dfrac{v_n}{2} = \dfrac{u_n - v_n}{4} = \dfrac{w_n}{4} \geqslant 0$.
4. (a) $t_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + 2v_{n+1}}{3} = \dfrac{u_{n+1} + (u_{n+1} + v_n)}{3} = \dfrac{2u_{n+1}}{3} + \dfrac{v_n}{3} = \dfrac{u_n + v_n}{3} + \dfrac{v_n}{3} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} = t_n$.
   (b) Les suites (u_n) et (v_n) étant adjacentes, elles convergent vers une même limite l. D'après la question précédente, la suite (t_n) est constante égale à $t_0 = \dfrac{10}{3}$. De plus $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ donc la suite (t_n) converge vers $\dfrac{l + 2l}{3} = l$. On en déduit que $l = \dfrac{10}{3}$.