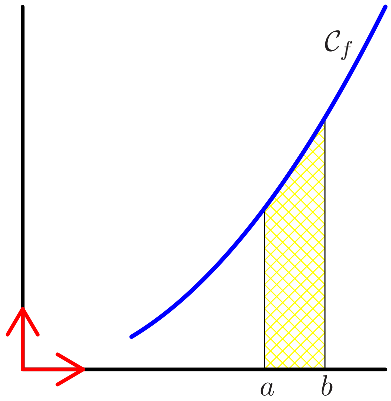
Définition de l'intégrale

Définition. *Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. Le plan est muni d'un repère orthogonal. L'aire (exprimée en unités d'aire) du domaine délimité par la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est appelée* intégrale de la fonction f entre a et b *et est notée :*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



Théorème. *Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive quelconque de f sur $[a;b]$, alors :*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Démontrer et interpréter graphiquement les propriétés suivantes :

Propriété 1. *Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I et trois réels $a \leqslant b \leqslant c$ de l'intervalle I, alors :*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x}$$

Propriété 2. *Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et k un réel positif, alors :*

$$\boxed{\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$

Propriété 3. *Soit f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a;b]$, alors :*

$$\boxed{\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$$

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^2 x^3\mathrm{d}x \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\mathrm{d}t \qquad \int_3^5 \frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad \int_0^2 e^{3x}\mathrm{d}x$$

$$\int_1^2 (x^2+x+1)^2\mathrm{d}x \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)\mathrm{d}t \qquad \int_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\mathrm{d}t$$