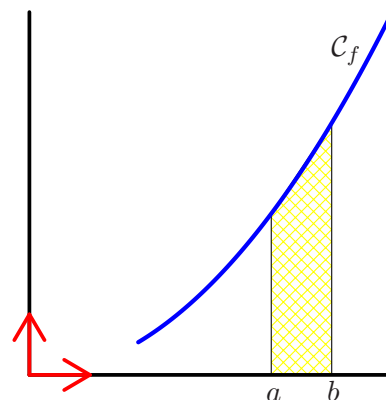


Intégration

1 Cas d'une fonction positive

Définition 1. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Le plan est muni d'un repère orthogonal. L'aire (exprimée en unités d'aire) du domaine délimité par la courbe représentative C_f de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est appelée intégrale de la fonction f entre a et b et est notée :

$$\int_a^b f(x)dx$$



Remarque 1. $\int_a^b 0 dx = 0$ et $\int_a^a f(x)dx = 0$

Exemple 1. Calcul de $\int_2^3 (2x + 1)dx$.

Théorème 1. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. La fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$, de plus c'est l'unique primitive de f sur $[a; b]$ s'annulant en a .

Remarque 2. Ce Théorème permet d'affirmer que toute fonction continue positive admet des primitives!

Démonstration. au programme dans le cas d'une fonction f monotone, la dérivabilité de la fonction F étant prouvée au moyen d'un encadrement d'origine géométrique de la quantité $F(x + h) - F(x)$. \square

Corollaire 1. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et F une primitive quelconque de f sur $[a; b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

Démonstration. au programme. \square

Exemple 2. Calcul de $\int_1^2 x^3 dx$.

Propriété 1. Relation de Chasles

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I et trois réels $a \leq b \leq c$ de l'intervalle I , alors :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Démonstration. au programme, au moyen d'une interprétation géométrique. □

Propriété 2. Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a; b]$ et k un réel positif, alors :

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Démonstration. au programme, en utilisant le Corollaire 1. □

Propriété 3. Soient f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a; b]$. Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[a; b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Démonstration. au programme, au moyen d'une interprétation géométrique. □

Corollaire 2. Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Si $m \leq f(x) \leq M$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[a; b]$, alors :

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

Démonstration. au programme. □

Définition 2. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ avec $a < b$. On appelle valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$:

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx$$

2 Cas d'une fonction de signe quelconque

Définition 3. Soit f une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle $[a; b]$, alors l'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à la somme des aires des domaines définis par les intervalles où la fonction f garde un signe constant multipliées par le coefficient -1 pour les intervalles où la fonction est négative.

Exemple 3. Interprétation géométrique de $\int_{-2}^3 (x-1)dx$.

On admet que toutes les propriétés de l'intégrale vues précédemment demeurent valables dans le cas d'une fonction continue de signe quelconque.

Propriété 4. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, alors :

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Démonstration. au programme. □

Propriété 5. Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions continues et dérivables sur un intervalle $[a; b]$ avec u' et v' continues, alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x) \right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(x)'v(x)dx$$

Démonstration. au programme. □

Exemple 4. Calcul de $\int_1^2 x \ln(x)dx$.

On peut également généraliser la notion d'intégrale pour des bornes en ordre décroissant :

Définition 4. Soit f une fonction continue un intervalle $[a; b]$, alors :

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

Les propriétés de l'intégrale vues précédemment demeurent valables à l'exception de celles faisant intervenir l'ordre en particulier l'inégalité de la moyenne!