

Devoir maison de Mathématiques n°6

Exercice 1

On pose $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \, dx$ et pour tout nombre n entier naturel non nul $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin 3x \, dx$.

- (a) Calculer I_0 .
(b) En utilisant une intégration par parties, calculer I_1 .
- (a) En effectuant deux intégrations par parties successives, déterminer, I_{n+2} en fonction de I_n lorsque $n \geq 1$.
(b) Vérifier que $I_3 = \frac{\pi^2}{108} - \frac{2}{27}$.
- Sans calculer l'intégrale I_n ,
 - montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone
 - comparer I_n à $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \, dx$ pour tout nombre n entier naturel non nul
 - déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$.

On appelle \mathcal{C} la représentation graphique de f , dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0.
- Calculer $f'(x)$ en fonction de x . Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $(2 - \ln x) \ln x$. Déterminer le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.
- Tracer la représentation graphique \mathcal{C} de f dans (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- On pose pour $p \geq 1$, $I_p = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^p}{x^2} \, dx$.
 - Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
 - Prouver, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier p supérieur ou égal à 1 :

$$I_{p+1} = -\frac{2^{p+1}}{e^2} + (p+1)I_p$$

- En utilisant les résultats précédents, calculer successivement I_2 , I_3 , I_4 .
- On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de courbe constitué des points de \mathcal{C} , d'abscisses comprises entre 1 et e^2 . Le point M de \mathcal{C} , d'abscisse x , décrit alors un cercle de rayon $f(x)$. Calculer le volume du solide ainsi engendré, en unités de volume.