Devoir maison de Mathématiques n°6

Exercice 1

On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \, \mathrm{d}x$ et pour tout nombre n entier naturel non nul $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin 3x \, \mathrm{d}x$.

1. (a) Calculer I_0.
   (b) En utilisant une intégration par parties, calculer I_1.
2. (a) En effectuant deux intégrations par parties successives, déterminer, I_{n+2} en fonction de I_n lorsque $n \geqslant 1$.
   (b) Vérifier que $I_3 = \dfrac{\pi^2}{108} - \dfrac{2}{27}$.
3. Sans calculer l'intégrale I_n,
   (a) montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone
   (b) comparer I_n à $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \mathrm{d}x$ pour tout nombre n entier naturel non nul
   (c) déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0 \; ; \; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

On appelle $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f, dans un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0.
2. Calculer $f'(x)$ en fonction de x. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $(2 - \ln x)\ln x$. Déterminer le sens de variation de f sur $]0 \; ; \; +\infty[$.
3. Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
4. On pose pour $p \geqslant 1$, $I_p = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{(\ln x)^p}{x^2} \, \mathrm{d}x$.
   (a) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
   (b) Prouver, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier p supérieur ou égal à 1 :
   $$I_{p+1} = -\frac{2^{p+1}}{\mathrm{e}^2} + (p+1)I_p$$
   (c) En utilisant les résultats précédents, calculer successivement I_2, I_3, I_4.
   (d) On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de courbe constitué des points de $\mathcal{C}$, d'abscisses comprises entre 1 et e^2. Le point M de $\mathcal{C}$, d'abscisse x, décrit alors un cercle de rayon $f(x)$. Calculer le volume du solide ainsi engendré, en unités de volume.