Correction du devoir maison de Mathématiques n°6

Exercice 1

On pose $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \, \mathrm{d}x$ et pour tout nombre n entier naturel non nul $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin 3x \, \mathrm{d}x$.

1. (a) On a :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos 3x}{3}\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}$$

(b) On pose $u(x) = x$ et $v(x) = -\frac{\cos 3x}{3}$ fonctions continues et dérivables sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{6}]$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \sin 3x$ également continues sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{6}]$, on applique ensuite la formule d'intégration par parties $\int uv' = [uv] - \int u'v$.

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 3x \, \mathrm{d}x = \left[x \times \frac{-\cos 3x}{3}\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} 1 \times \frac{-\cos 3x}{3} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\frac{\sin 3x}{3}\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{9}$$

2. (a) On a :

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{n+2} \sin 3x \, \mathrm{d}x = \left[x^{n+2} \times \frac{-\cos 3x}{3}\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} (n+2)x^{n+1} \times \frac{-\cos 3x}{3} \, \mathrm{d}x = \frac{n+2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{n+1} \cos 3x \, \mathrm{d}x$$

et :

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{n+1} \cos 3x \, \mathrm{d}x = \left[x^{n+1} \times \frac{\sin 3x}{3}\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} (n+1)x^n \times \frac{\sin 3x}{3} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1} - \frac{n+1}{3} I_n$$

donc :

$$I_{n+2} = \frac{n+2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1} - \frac{n+1}{3} I_n\right) = \frac{n+2}{9}\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1} - (n+1)I_n\right)$$

(b) On a :

$$I_3 = I_{1+2} = \frac{1+2}{9}\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)^{1+1} - (1+1)I_1\right) = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{9}\right) = \frac{\pi^2}{108} - \frac{2}{27}$$

3. (a) Sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{6}]$ on a $x^{n+1} \leqslant x^n$ et $\sin 3x \geqslant 0$ donc $x^{n+1} \sin 3x \leqslant x^n \sin 3x$ et par intégration $I_{n+1} \leqslant I_n$, la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

(b) Sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{6}]$ on a $\sin 3x \leqslant 1$ donc $x^n \sin 3x \leqslant x^n$ et par intégration $I_n \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \, \mathrm{d}x$.

(c) On en déduit que :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1}$$

et d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

Exercice 2

1. On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} (\ln x)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = +\infty$.

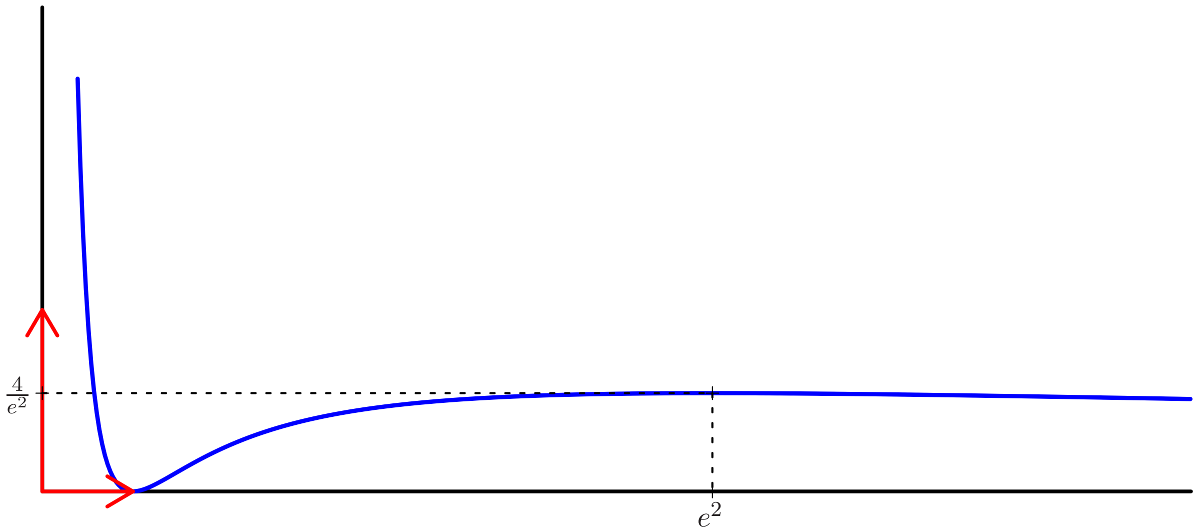
   On a $f(x) = \left(\dfrac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et :

$$f'(x) = \frac{\frac{2\ln x}{x}\times x - (\ln x)^2 \times 1}{x^2} = \frac{(2-\ln x)\ln x}{x^2}$$

   $f'(x)$ a le même signe que $(2-\ln x)\ln x$ d'où le tableau de variations de la fonction f :

x			1		e^2		
$2-\ln x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$\ln x$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0



3.

4. (a) On a :

$$I_1 = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[\ln x \times \frac{-1}{x}\right]_{x=1}^{x=e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{x}\times\frac{-1}{x}\,dx = -\frac{2}{e^2} + \left[\frac{-1}{x}\right]_{x=1}^{x=e^2} = 1 - \frac{3}{e^2}$$

   (b) On a :

$$I_{p+1} = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^{p+1}}{x^2}\,dx = \left[(\ln x)^{p+1}\times\frac{-1}{x}\right]_{x=1}^{x=e^2} - \int_1^{e^2} \frac{(p+1)(\ln x)^p}{x}\times\frac{-1}{x}\,dx = -\frac{2^{p+1}}{e^2} + (p+1)I_p$$

   (c) On en déduit :

$$I_2 = I_{1+1} = -\frac{2^{1+1}}{e^2} + (1+1)I_1 = -\frac{4}{e^2} + 2(1-\frac{3}{e^2}) = 2 - \frac{10}{e^2}$$
$$I_3 = I_{2+1} = -\frac{2^{2+1}}{e^2} + (2+1)I_2 = -\frac{8}{e^2} + 3(2-\frac{10}{e^2}) = 6 - \frac{38}{e^2}$$
$$I_4 = I_{3+1} = -\frac{2^{3+1}}{e^2} + (3+1)I_3 = -\frac{16}{e^2} + 4(6-\frac{38}{e^2}) = 24 - \frac{168}{e^2}$$

   (d) On a :

$$V = \int_1^{e^2} \pi\times(f(x))^2\,dx = \int_1^{e^2} \pi\frac{(\ln x)^4}{x^2}\,dx = \pi I_4 = \pi\left(24 - \frac{168}{e^2}\right)$$