

Devoir de Mathématiques n°6

Exercice 1

Restitution organisée de connaissances

1. Démontrer que $\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx$ pour u et v deux fonctions dérivables à dérivées continues sur l'intervalle $[a; b]$.
2. On considère les intégrales $I = \int_0^\pi \sin(x)e^x dx$ et $J = \int_0^\pi \cos(x)e^x dx$.
 - (a) Démontrer que $J = -I$ et $J = I - e^\pi - 1$.
 - (b) En déduire les valeurs exactes de I et J .

Exercice 2

On considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 t^n e^{1-t} dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Calculer I_1 au moyen d'une intégration par parties.
 (b) Montrer que $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 (c) En déduire les valeurs exactes de I_2 et I_3 .
2. (a) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
 (b) Prouver que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est convergente.
3. (a) Montrer que $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 (b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(x+5)}{x+5}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $[0; +\infty[$. Étudier le signe de sa fonction dérivée f' , sa limite éventuelle en $+\infty$ et dresser le tableau de ses variations.
2. On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par son terme général $u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$.
 - (a) Justifier que, si $n \leq x \leq n+1$, alors $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.
 - (b) Montrer, sans chercher à calculer u_n , que, pour tout entier naturel n , $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.
 - (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. Soit F la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = [\ln(x+5)]^2$.
 - (a) Justifier la dérivabilité sur $[0; +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x , le nombre $F'(x)$.
 - (b) On pose pour tout entier naturel n , $I_n = \int_0^n f(x)dx$.
Calculer I_n .
4. On pose pour tout entier naturel n , $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.
Calculer S_n . La suite (S_n) est-elle convergente ?