

Correction du devoir de Mathématiques n°6

Exercice 1

1. On pose $F(x) = u(x) \times v(x)$, la fonction F est dérivable et sa dérivée $F'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ est continue sur l'intervalle $[a; b]$ donc :

$$\begin{aligned} \int_a^b F'(x) dx &= F(b) - F(a) \\ \int_a^b u'(x)v(x) + u(x)v'(x) dx &= u(b)v(b) - u(a)v(a) \\ \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx &= u(b)v(b) - u(a)v(a) \\ \int_a^b u(x)v'(x) dx &= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x) dx \end{aligned}$$

2. (a) On pose $u(x) = e^x$ et $v(x) = \sin(x)$ et on applique la formule précédente :

$$J = \int_a^b u(x)v'(x) dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x) dx = e^\pi \sin(\pi) - e^0 \sin(0) - \int_a^b e^x \sin(x) dx = -I$$

On pose $u(x) = \cos(x)$ et $v(x) = e^x$ et on applique la formule précédente :

$$J = \int_a^b u(x)v'(x) dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x) dx = \cos(\pi)e^\pi - \cos(0)e^0 - \int_a^b -\sin(x)e^x dx = -e^\pi - 1 + I$$

- (b) On en déduit par addition que $J = -\frac{e^\pi + 1}{2}$ d'où $I = -J = \frac{e^\pi + 1}{2}$.

Exercice 2

1. (a) $I_1 = \left[t(-e^{1-t}) \right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 1(-e^{1-t}) dt = -1 + \left[-e^{1-t} \right]_{t=0}^{t=1} = -1 + (-1 + e) = e - 2$.
- (b) $I_{n+1} = \left[t^{n+1}(-e^{1-t}) \right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 (n+1)t^n(-e^{1-t}) dt = -1 + (n+1)I_n$.
- (c) $I_2 = -1 + 2I_1 = -1 + 2(e - 2) = 2e - 5$.
 $I_3 = -1 + 3I_2 = -1 + 3(2e - 5) = 6e - 16$.
2. (a) On a $t^{n+1} = t^n \times t \leq t^n$ car $t \in [0; 1]$, on en déduit que $t^{n+1}e^{1-t} \leq t^n e^{1-t}$ car $e^{1-t} \geq 0$ pour $t \in [0; 1]$ et par intégration $I_{n+1} \leq I_n$.
- (b) On a $t^n e^{1-t} \geq 0$ pour $t \in [0; 1]$, on en déduit par intégration que $I_n \geq 0$. La suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.
3. (a) On a $0 \leq t^n e^{1-t} \leq et^n$ car $e^{1-t} \leq e$ pour $t \in [0; 1]$, on en déduit par intégration que $0 \leq I_n \leq \int_0^1 et^n dt = \left[-\frac{et^{n+1}}{n+1} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{e}{n+1}$.
- (b) D'après le théorème des gendarmes, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$.

Exercice 3

1. La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ car elle est un quotient de fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$ avec de plus la fonction au dénominateur qui ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$. On a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+5} \times (x+5) - \ln(x+5) \times 1}{(x+5)^2} = \frac{1 - \ln(x+5)}{(x+5)^2}$$

De plus :

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x+5) \leq 1 \Leftrightarrow x+5 \leq e \Leftrightarrow x \leq e-5$$

Comme $e-5 < 0$, la fonction f est décroissante. On a de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ car $\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\ln X}{X} = 0$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$\frac{\ln 5}{5}$	0

2. (a) La fonction f est décroissante!
 (b) On intègre l'inégalité précédente :

$$\int_n^{n+1} f(n+1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx$$

soit $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

- (c) Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$, on en déduit en utilisant le théorème des gendarmes que la suite (u_n) est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

3. (a) La fonction F est dérivable sur $[0; +\infty[$ car elle est la composée par la fonction carré d'une fonction dérivable sur $[0; +\infty[$, de plus $F'(x) = \frac{2 \ln(x+5)}{x+5}$.

- (b) On a $f(x) = 2F'(x)$ donc la fonction $\frac{1}{2}F$ est une primitive de f sur $[0; +\infty[$, on en déduit :

$$I_n = \left[\frac{1}{2} (\ln(x+5))^2 \right]_{x=0}^{x=n} = \frac{(\ln(n+5))^2 - (\ln 5)^2}{2}$$

4. On a :

$$S_n = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x) dx = \int_0^n f(x) dx = I_n = \frac{(\ln(n+5))^2 - (\ln 5)^2}{2}$$

La suite (S_n) est donc divergente car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+5) = +\infty$.