

## Correction du devoir de Mathématiques n°6

## Exercice 1

1. On pose  $F(x) = u(x) \times v(x)$ , la fonction  $F$  est dérivable et sa dérivée  $F'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$  est continue sur l'intervalle  $[a; b]$  donc :

$$\begin{aligned} \int_a^b F'(x) dx &= F(b) - F(a) \\ \int_a^b u'(x)v(x) + u(x)v'(x) dx &= u(b)v(b) - u(a)v(a) \\ \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx &= u(b)v(b) - u(a)v(a) \\ \int_a^b u'(x)v(x) dx &= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x) dx \end{aligned}$$

2. (a) On pose  $u(x) = e^x$  et  $v(x) = \sin(x)$  et on applique la formule précédente :

$$I = \int_a^b u'(x)v(x) dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x) dx = e^\pi \sin(\pi) - e^0 \sin(0) - \int_a^b e^x \cos(x) dx = -J$$

On pose  $u(x) = -\cos(x)$  et  $v(x) = e^x$  et on applique la formule précédente :

$$I = \int_a^b u'(x)v(x) dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x) dx = -\cos(\pi)e^\pi + \cos(0)e^0 - \int_a^b -\cos(x)e^x dx = e^\pi + 1 + J$$

- (b) On en déduit par addition que  $I = \frac{e^\pi + 1}{2}$  d'où  $J = -I = -\frac{e^\pi + 1}{2}$ .

## Exercice 2

1. (a)  $I_1 = \left[ (1-t)e^t \right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 -1e^t dt = -1 + (e-1) = e-2$ .
- (b)  $I_{n+1} = \left[ (1-t)^{n+1}e^t \right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 -(n+1)(1-t)^n e^t dt = -1 + (n+1)I_n$ .
- (c)  $I_2 = -1 + 2I_1 = -1 + 2(e-2) = 2e-5$ .  
 $I_3 = -1 + 3I_2 = -1 + 3(2e-5) = 6e-16$ .
2. (a) On a  $(1-t)^{n+1} = (1-t)^n \times (1-t) \leq (1-t)^n$  car  $0 \leq 1-t \leq 1$  pour  $t \in [0; 1]$ , on en déduit que  $(1-t)^{n+1}e^t \leq (1-t)^ne^t$  car  $e^t \geq 0$  et par intégration  $I_{n+1} \leq I_n$ .
- (b) On a  $(1-t)^ne^t \geq 0$  pour  $t \in [0; 1]$ , on en déduit par intégration que  $I_n \geq 0$ . La suite  $(I_n)_{n \geq 1}$  est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.
3. (a) On a  $0 \leq (1-t)^ne^t \leq e(1-t)^n$  car  $e^t \leq e$  pour  $t \in [0; 1]$ , on en déduit par intégration que  $0 \leq I_n \leq \int_0^1 e(1-t)^n dt = \left[ -\frac{e(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{e}{n+1}$ .
- (b) D'après le théorème des gendarmes, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ .

**Exercice 3**

1. La fonction  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  car elle est un quotient de fonctions dérivables sur  $[0; +\infty[$  avec de plus la fonction au dénominateur qui ne s'annule pas sur  $[0; +\infty[$ . On a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+3} \times (x+3) - \ln(x+3) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{1 - \ln(x+3)}{(x+3)^2}$$

De plus :

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x+3) \leq 1 \Leftrightarrow x+3 \leq e \Leftrightarrow x \leq e-3$$

Comme  $e-3 < 0$ , la fonction  $f$  est décroissante. On a de plus  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  car  $\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ .

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$\frac{\ln 3}{3}$	0

2. (a) La fonction  $f$  est décroissante!  
 (b) On intègre l'inégalité précédente :

$$\int_n^{n+1} f(n+1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx$$

soit  $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$ .

- (c) Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$ , on en déduit en utilisant le théorème des gendarmes que la suite  $(u_n)$  est convergente et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

3. (a) La fonction  $F$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  car elle est la composée par la fonction carré d'une fonction dérivable sur  $[0; +\infty[$ , de plus  $F'(x) = \frac{2 \ln(x+3)}{x+3}$ .

- (b) On a  $f(x) = 2F'(x)$  donc la fonction  $\frac{1}{2}F$  est une primitive de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ , on en déduit :

$$I_n = \left[ \frac{1}{2} (\ln(x+3))^2 \right]_{x=0}^{x=n} = \frac{(\ln(n+3))^2 - (\ln 3)^2}{2}$$

4. On a :

$$S_n = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x) dx = \int_0^n f(x) dx = I_n = \frac{(\ln(n+3))^2 - (\ln 3)^2}{2}$$

La suite  $(S_n)$  est donc divergente car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+3) = +\infty$ .