Correction du devoir de Mathématiques n°6

Exercice 1

1. On pose $F(x) = u(x) \times v(x)$, la fonction F est dérivable et sa dérivée $F'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ est continue sur l'intervalle $[a; b]$ donc :

$$\begin{aligned}
\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x &= F(b) - F(a) \\
\int_a^b u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\mathrm{d}x &= u(b)v(b) - u(a)v(a) \\
\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x &= u(b)v(b) - u(a)v(a) \\
\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x &= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

2. (a) On pose $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = \sin(x)$ et on applique la formule précédente :

$$I = \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^\pi \sin(\pi) - \mathrm{e}^0 \sin(0) - \int_a^b \mathrm{e}^x \cos(x)\mathrm{d}x = -J$$

On pose $u(x) = -\cos(x)$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$ et on applique la formule précédente :

$$I = \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = -\cos(\pi)\mathrm{e}^\pi + \cos(0)\mathrm{e}^0 - \int_a^b -\cos(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^\pi + 1 + J$$

(b) On en déduit par addition que $I = \dfrac{\mathrm{e}^\pi + 1}{2}$ d'où $J = -I = -\dfrac{\mathrm{e}^\pi + 1}{2}$.

Exercice 2

1. (a) $I_1 = \Big[(1-t)\mathrm{e}^t\Big]_{t=0}^{t=1} - \displaystyle\int_0^1 -1\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = -1 + (\mathrm{e} - 1) = \mathrm{e} - 2$.

(b) $I_{n+1} = \Big[(1-t)^{n+1}\mathrm{e}^t\Big]_{t=0}^{t=1} - \displaystyle\int_0^1 -(n+1)(1-t)^n\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = -1 + (n+1)I_n$.

(c) $I_2 = -1 + 2I_1 = -1 + 2(\mathrm{e} - 2) = 2\mathrm{e} - 5$.
$I_3 = -1 + 3I_2 = -1 + 3(2\mathrm{e} - 5) = 6\mathrm{e} - 16$.

2. (a) On a $(1-t)^{n+1} = (1-t)^n \times (1-t) \leqslant (1-t)^n$ car $0 \leqslant 1 - t \leqslant 1$ pour $t \in [0; 1]$, on en déduit que $(1-t)^{n+1}\mathrm{e}^t \leqslant (1-t)^n\mathrm{e}^t$ car $\mathrm{e}^t \geqslant 0$ et par intégration $I_{n+1} \leqslant I_n$.

(b) On a $(1-t)^n\mathrm{e}^t \geqslant 0$ pour $t \in [0; 1]$, on en déduit par intégration que $I_n \geqslant 0$. La suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

3. (a) On a $0 \leqslant (1-t)^n\mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}(1-t)^n$ car $\mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}$ pour $t \in [0; 1]$, on en déduit par intégration que $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}(1-t)^n\mathrm{d}t = \Big[-\frac{\mathrm{e}(1-t)^{n+1}}{n+1}\Big]_{t=0}^{t=1} = \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.

(b) D'après le théorème des gendarmes, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{n+1} = 0$.

Exercice 3

1. La fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ car elle est un quotient de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$ avec de plus la fonction au dénominateur qui ne s'annule pas sur $[0;+\infty[$. On a :

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{x+3} \times (x+3) - \ln(x+3) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}$$

De plus :

$$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x+3) \leqslant 1 \Leftrightarrow x+3 \leqslant \mathrm{e} \Leftrightarrow x \leqslant \mathrm{e}-3$$

Comme $\mathrm{e}-3<0$, la fonction f est décroissante. On a de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{X\to\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\frac{\ln 3}{3}$	$\searrow$	0

2. (a) La fonction f est décroissante !

   (b) On intègre l'inégalité précédente :

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{n+1} f(n)\mathrm{d}x$$

   soit $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$.

   (c) Or $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$, on en déduit en utilisant le théorème des gendarmes que la suite (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. (a) La fonction F est dérivable sur sur $[0;+\infty[$ car elle est la composée par la fonction carré d'une fonction dérivable sur $[0;+\infty[$, de plus $F'(x) = \dfrac{2\ln(x+3)}{x+3}$.

   (b) On a $f(x) = 2F'(x)$ donc la fonction $\dfrac{1}{2}F$ est une primitive de f sur $[0;+\infty[$, on en déduit :

$$I_n = \left[\frac{1}{2}(\ln(x+3))^2\right]_{x=0}^{x=n} = \frac{(\ln(n+3))^2 - (\ln 3)^2}{2}$$

4. On a :

$$S_n = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{n-1}^n f(x)\mathrm{d}x = \int_0^n f(x)\mathrm{d}x = I_n = \frac{(\ln(n+3))^2-(\ln 3)^2}{2}$$

La suite (S_n) est donc divergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+3) = +\infty$.