

Formule du binôme de Newton - Triangle de Pascal

Développement de $(1 + x)^n$

1. On appelle $c_{n,k}$ le coefficient de x^k dans le développement de $(1 + x)^n$, on a donc :

$$(1 + x)^n = c_{n,0} + c_{n,1} x + c_{n,2} x^2 + \cdots + c_{n,k} x^k + \cdots + c_{n,n} x^n$$

- (a) Déterminer $c_{1,0}$ et $c_{1,1}$.
 - (b) Développer $(1 + x)^2$, en déduire $c_{2,0}$, $c_{2,1}$ et $c_{2,2}$.
 - (c) Développer $(1 + x)^3$, en déduire $c_{3,0}$, $c_{3,1}$, $c_{3,2}$ et $c_{3,3}$.
2. (a) Prouver que pour tout $n \geq 1$, on a $c_{n,0} = c_{n,n} = 1$.
- (b) En remarquant que $(1 + x)^{n+1} = (1 + x) \times (1 + x)^n$, prouver que pour tout $n \geq 1$ et pour tout k tel que $0 \leq k \leq n$, on a $\boxed{c_{n+1,k} = c_{n,k-1} + c_{n,k}}$.
3. On représente les coefficients $c_{n,k}$ dans un tableau avec n représentant le numéro de ligne et k le numéro de colonne.
- (a) Remplir les trois premières lignes du tableau.
 - (b) Utiliser la formule de récurrence pour compléter les deux lignes suivantes.
 - (c) En déduire le développement de $(1 + x)^4$ et $(1 + x)^5$.

Développement de $(a + b)^n$

En remarquant que $(a + b)^n = a^n \times \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$ pour $a \neq 0$, prouver que pour tous nombres réels a et b et tout nombre entier naturel n non nul, on a :

$$\boxed{(a + b)^n = a^n + c_{n,1} a^{n-1}b + c_{n,2} a^{n-2}b^2 + \cdots + c_{n,n-2} a^2b^{n-2} + c_{n,n-1} ab^{n-1} + b^n}$$

Formule factorielle des coefficients binômiaux

Définition. On appelle factorielle d'un entier naturel n le produit des nombres naturels de 1 jusqu'à n , on pose $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n - 1) \times n$ et par convention $0! = 1$.

Démontrer par récurrence sur $n \geq 1$ que :

$$\boxed{c_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad n \geq 1 \quad , \quad 0 \leq k \leq n}$$