Formule du binôme de Newton - Triangle de Pascal

Développement de $(1+x)^n$

1. On appelle $c_{n,k}$ le coefficient de x^k dans le développement de $(1+x)^n$, on a donc :

$$(1+x)^n = c_{n,0} + c_{n,1}\ x + c_{n,2}\ x^2 + \cdots + c_{n,k}\ x^k + \cdots + c_{n,n}\ x^n$$

   (a) Déterminer $c_{1,0}$ et $c_{1,1}$.

   (b) Développer $(1+x)^2$, en déduire $c_{2,0}$, $c_{2,1}$ et $c_{2,2}$.

   (c) Développer $(1+x)^3$, en déduire $c_{3,0}$, $c_{3,1}$, $c_{3,2}$ et $c_{3,3}$.

2. (a) Prouver que pour tout $n \geqslant 1$, on a $c_{n,0} = c_{n,n} = 1$.

   (b) En remarquant que $(1+x)^{n+1} = (1+x) \times (1+x)^n$, prouver que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a $\boxed{c_{n+1,k} = c_{n,k-1} + c_{n,k}}$.

3. On représente les coefficients $c_{n,k}$ dans un tableau avec n représentant le numéro de ligne et k le numéro de colonne.

   (a) Remplir les trois premières lignes du tableau.

   (b) Utiliser la formule de récurrence pour compléter les deux lignes suivantes.

   (c) En déduire le développement de $(1+x)^4$ et $(1+x)^5$.

Développement de $(a+b)^n$

En remarquant que $(a+b)^n = a^n \times \left(1 + \dfrac{b}{a}\right)^n$ pour $a \neq 0$, prouver que pour tous nombres réels a et b et tout nombre entier naturel n non nul, on a :

$$\boxed{(a+b)^n = a^n + c_{n,1}\ a^{n-1}b + c_{n,2}\ a^{n-2}b^2 + \cdots + c_{n,n-2}\ a^2b^{n-2} + c_{n,n-1}\ ab^{n-1} + b^n}$$

Formule factorielle des coefficients binômiaux

Définition. *On appelle* factorielle *d'un entier naturel n le produit des nombres naturels de* 1 *jusqu'à n, on pose $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$ et par convention $0! = 1$.*

Démontrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ que :

$$\boxed{c_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad n \geqslant 1 \quad , \quad 0 \leqslant k \leqslant n}$$