

# Probabilités

## 1 Vocabulaire

**Définition 1.** Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est lié au hasard. Chaque résultat possible est appelé une éventualité, l'ensemble des éventualités est appelé univers.

**Exemple 1.** On considère le lancer d'un dé à six faces, l'univers est  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

**Définition 2.** On appelle événement un ensemble d'éventualités, c'est à dire une partie de l'univers. On distingue :

- événement élémentaire : il ne contient qu'une seule éventualité.
- événement impossible : il ne contient aucune éventualité.
- événement certain : il contient toutes les éventualités.

**Exemple 2.** On considère le lancer d'un dé à six faces.

- le 5 sort :  $A = \{5\}$ , événement élémentaire.
- un multiple de 2 sort :  $B = \{2, 4, 6\}$ .
- un multiple de 7 sort :  $C = \emptyset$ , événement impossible.
- un nombre inférieur à 7 sort :  $D = \Omega$ , événement certain.

**Définition 3.**

- On note  $E_1 \cap E_2$  l'intersection de deux événements, c'est l'ensemble des éventualités appartenant à  $E_1$  et à  $E_2$ .
- On note  $E_1 \cup E_2$  l'union de deux événements, c'est l'ensemble des éventualités appartenant à  $E_1$  ou à  $E_2$ .
- On note  $\bar{E}$  le contraire de l'événement  $E$ , c'est l'ensemble des éventualités qui n'appartiennent pas à  $E$ .
- Deux événements  $E_1$  et  $E_2$  sont dits incompatibles si  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ , c'est à dire qu'ils ne peuvent se réaliser en même temps.

**Exemple 3.** Dans l'exemple précédent, on a :

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\} \quad A \cap D = \{5\} \quad \bar{B} = \{1, 3, 5\} \quad A \cap B = \emptyset \text{ donc } A \text{ et } B \text{ sont incompatibles}$$

**Remarque 1.**

$$\bar{\Omega} = \emptyset \quad \bar{\emptyset} = \Omega \quad \overline{\bar{E}} = E \quad E \text{ et } \bar{E} \text{ sont incompatibles}$$

## 2 Notion de Probabilité

**Définition 4.** On considère un univers fini  $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . Une loi de probabilité sur  $\Omega$  est l'association à chaque éventualité  $e_i$  de  $\Omega$  d'un nombre réel  $p_i$  appelé probabilité tels que :  $0 \leq p_i \leq 1$  et  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ .

Si de plus on a  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$ , la loi est dite équirépartie.

**Exemple 4.** On considère le lancer d'un dé équilibré :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad P = \left\{ \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right\}$$

On considère le lancer d'un dé truqué :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad P = \left\{ \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \right\}$$

**Définition 5.** Étant donné un univers fini  $\Omega$  muni d'une loi de probabilité  $P$ , on appelle probabilité d'un événement  $E$  et on note  $P(E)$  la somme des probabilités  $p_i$  associées aux éventualités formant l'événement  $E$ .

**Remarque 2.**

$$P(\emptyset) = 0 \quad P(\Omega) = 1 \quad 0 \leq P(E) \leq 1$$

**Exemple 5.** Calcul de la probabilité d'obtenir un nombre pair dans le cas du dé truqué.

**Propriété 1.** On considère un univers  $\Omega$  contenant  $n$  éventualités muni d'une loi de probabilité équirépartie  $P$ , alors si  $E$  est un événement contenant  $p$  éventualités on a :

$$P(E) = \frac{p}{n} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

*Démonstration.* au programme. □

**Exemple 6.** Calcul de la probabilité d'obtenir un nombre pair dans le cas du dé équilibré.

**Propriété 2.** On considère une loi de probabilité  $P$  sur un univers fini  $\Omega$  et deux événements  $E_1$  et  $E_2$ , alors  $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$ .

*Démonstration.* au programme. □

**Corollaire 1.** On considère une loi de probabilité  $P$  sur un univers fini  $\Omega$  et deux événements  $E_1$  et  $E_2$  incompatibles, alors  $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ .

*Démonstration.* au programme. □

**Corollaire 2.** On considère une loi de probabilité  $P$  sur un univers fini  $\Omega$  et un événement  $E$ , alors  $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ .

*Démonstration.* au programme. □

### 3 Probabilités conditionnelles

**Définition 6.** On considère un univers fini muni d'une loi de probabilité  $P$  et deux événements  $A$  et  $B$  avec  $P(A) \neq 0$ . On appelle probabilité de  $B$  sachant  $A$  :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

**Exemple 7.** Calcul de la probabilité d'obtenir un numéro pair sachant que l'on n'a pas obtenu un six dans le cas du dé truqué.

**Propriété 3.** On considère un univers fini muni d'une loi de probabilité  $P$  et deux événements  $A$  et  $B$  avec  $P(A) \neq 0$  et  $P(B) \neq 0$ , alors :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

*Démonstration.* au programme. □

**Exercice 1.** Calcul de la probabilité de tirer successivement (sans remise) deux boules rouges dans une urne contenant 7 boules rouges et 13 boules vertes.

**Définition 7.** On considère un univers fini muni d'une loi de probabilité  $P$  et deux événements  $A$  et  $B$  avec  $P(A) \neq 0$  et  $P(B) \neq 0$ . Les événements  $A$  et  $B$  sont dits indépendants pour la probabilité  $P$  si  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

**Exemple 8.** Obtenir un numéro pair et obtenir un numéro multiple de trois dans le cas du dé équilibré et du dé truqué.

**Propriété 4.** On considère un univers fini muni d'une loi de probabilité  $P$  et deux événements  $A$  et  $B$  indépendants, alors :

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{et} \quad P_B(A) = P(A)$$

**Définition 8.** On considère un univers fini  $\Omega$ . On dit que  $k$  événements  $E_1, E_2, \dots, E_k$  forment une partition de  $\Omega$  si les événements  $E_i$  sont non vides, deux à deux incompatibles et si  $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k = \Omega$ .

**Remarque 3.** Si  $\Omega$  est muni d'une loi de probabilité  $P$ , on a  $P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_k) = 1$ .

**Propriété 5.** Formule des probabilités totales

On considère un univers fini  $\Omega$  muni d'une loi de probabilité  $P$  et une partition  $E_1, E_2, \dots, E_k$  de  $\Omega$ , alors pour tout événement  $E$  :

$$P(E) = P(E \cap E_1) + P(E \cap E_2) + \dots + P(E \cap E_k)$$

*Démonstration.* au programme. □

**Exemple 9.** Calcul de la probabilité de tirer successivement (sans remise) deux boules de couleurs différentes dans une urne contenant 7 boules rouges et 13 boules vertes.