

Probabilités

1 Vocabulaire

Définition 1. Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est lié au hasard. Chaque résultat possible est appelé une éventualité, l'ensemble des éventualités est appelé univers.

Exemple 1. On considère le lancer d'un dé à six faces, l'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Définition 2. On appelle événement un ensemble d'éventualités, c'est à dire une partie de l'univers. On distingue :

- événement élémentaire : il ne contient qu'une seule éventualité.
- événement impossible : il ne contient aucune éventualité.
- événement certain : il contient toutes les éventualités.

Exemple 2. On considère le lancer d'un dé à six faces.

- le 5 sort : $A = \{5\}$, événement élémentaire.
- un multiple de 2 sort : $B = \{2, 4, 6\}$.
- un multiple de 7 sort : $C = \emptyset$, événement impossible.
- un nombre inférieur à 7 sort : $D = \Omega$, événement certain.

Définition 3.

- On note $E_1 \cap E_2$ l'intersection de deux événements, c'est l'ensemble des éventualités appartenant à E_1 et à E_2 .
- On note $E_1 \cup E_2$ l'union de deux événements, c'est l'ensemble des éventualités appartenant à E_1 ou à E_2 .
- On note \bar{E} le contraire de l'événement E , c'est l'ensemble des éventualités qui n'appartiennent pas à E .
- Deux événements E_1 et E_2 sont dits incompatibles si $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, c'est à dire qu'ils ne peuvent se réaliser en même temps.

Exemple 3. Dans l'exemple précédent, on a :

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\} \quad A \cap D = \{5\} \quad \bar{B} = \{1, 3, 5\} \quad A \cap B = \emptyset \text{ donc } A \text{ et } B \text{ sont incompatibles}$$

Remarque 1.

$$\bar{\Omega} = \emptyset \quad \bar{\emptyset} = \Omega \quad \overline{\bar{E}} = E \quad E \text{ et } \bar{E} \text{ sont incompatibles}$$

2 Notion de Probabilité

Définition 4. On considère un univers fini $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Une loi de probabilité sur Ω est l'association à chaque éventualité e_i de Ω d'un nombre réel p_i appelé probabilité tels que : $0 \leq p_i \leq 1$ et $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Si de plus on a $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$, la loi est dite équirépartie.

Exemple 4. On considère le lancer d'un dé équilibré :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad P = \left\{ \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right\}$$

On considère le lancer d'un dé truqué :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad P = \left\{ \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \right\}$$

Définition 5. Étant donné un univers fini Ω muni d'une loi de probabilité P , on appelle probabilité d'un événement E et on note $P(E)$ la somme des probabilités p_i associées aux éventualités formant l'événement E .

Remarque 2.

$$P(\emptyset) = 0 \quad P(\Omega) = 1 \quad 0 \leq P(E) \leq 1$$

Exemple 5. Calcul de la probabilité d'obtenir un nombre pair dans le cas du dé truqué.

Propriété 1. On considère un univers Ω contenant n éventualités muni d'une loi de probabilité équirépartie P , alors si E est un événement contenant p éventualités on a :

$$P(E) = \frac{p}{n} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Démonstration. au programme. □

Exemple 6. Calcul de la probabilité d'obtenir un nombre pair dans le cas du dé équilibré.

Propriété 2. On considère une loi de probabilité P sur un univers fini Ω et deux événements E_1 et E_2 , alors $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$.

Démonstration. au programme. □

Corollaire 1. On considère une loi de probabilité P sur un univers fini Ω et deux événements E_1 et E_2 incompatibles, alors $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$.

Démonstration. au programme. □

Corollaire 2. On considère une loi de probabilité P sur un univers fini Ω et un événement E , alors $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$.

Démonstration. au programme. □

3 Probabilités conditionnelles

Définition 6. On considère un univers fini muni d'une loi de probabilité P et deux événements A et B avec $P(A) \neq 0$. On appelle probabilité de B sachant A :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exemple 7. Calcul de la probabilité d'obtenir un numéro pair sachant que l'on n'a pas obtenu un six dans le cas du dé truqué.

Propriété 3. On considère un univers fini muni d'une loi de probabilité P et deux événements A et B avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

Démonstration. au programme. □

Exercice 1. Calcul de la probabilité de tirer successivement (sans remise) deux boules rouges dans une urne contenant 7 boules rouges et 13 boules vertes.

Définition 7. On considère un univers fini muni d'une loi de probabilité P et deux événements A et B avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Les événements A et B sont dits indépendants pour la probabilité P si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Exemple 8. Obtenir un numéro pair et obtenir un numéro multiple de trois dans le cas du dé équilibré et du dé truqué.

Propriété 4. On considère un univers fini muni d'une loi de probabilité P et deux événements A et B indépendants, alors :

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{et} \quad P_B(A) = P(A)$$

Définition 8. On considère un univers fini Ω . On dit que k événements E_1, E_2, \dots, E_k forment une partition de Ω si les événements E_i sont non vides, deux à deux incompatibles et si $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k = \Omega$.

Remarque 3. Si Ω est muni d'une loi de probabilité P , on a $P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_k) = 1$.

Propriété 5. Formule des probabilités totales

On considère un univers fini Ω muni d'une loi de probabilité P et une partition E_1, E_2, \dots, E_k de Ω , alors pour tout événement E :

$$P(E) = P(E \cap E_1) + P(E \cap E_2) + \dots + P(E \cap E_k)$$

Démonstration. au programme. □

Exemple 9. Calcul de la probabilité de tirer successivement (sans remise) deux boules de couleurs différentes dans une urne contenant 7 boules rouges et 13 boules vertes.