

# Variables aléatoires

## 1 Notion de Variable Aléatoire

**Définition 1.** *Étant donné un univers fini  $\Omega$ , on appelle variable aléatoire  $X$  sur  $\Omega$  toute fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .*

**Exemple 1.** *Somme des numéros lors d'un lancer de deux dés cubiques.*

**Définition 2.** *Soit  $X$  une variable aléatoire sur un univers fini  $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  muni d'une loi de probabilité  $P$ . On note  $\Omega' = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  l'ensemble des valeurs prise par la variable aléatoire  $X$  et  $(X = y_k)$  l'événement de  $\Omega$  constitué des éventualités ayant  $y_k$  pour image par la variable aléatoire  $X$ .*

*La loi de probabilité sur  $\Omega'$  définie en associant aux  $y_k$  les probabilités  $P(X = y_k)$  est appelée loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ .*

**Remarque 1.** *On a  $m \leq n$ .*

**Exemple 2.** *Loi de probabilité de la somme des numéros lors d'un lancer de deux dés cubiques équilibrés.*

**Définition 3.** *Soit  $X$  une variable aléatoire sur un univers fini  $\Omega$  muni d'une loi de probabilité  $P$  et prenant les valeurs  $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ .*

*On appelle espérance de la variable aléatoire  $X$  le réel :*

$$E(X) = \sum_{k=1}^{k=m} y_k P(X = y_k) = y_1 P(X = y_1) + \dots + y_m P(X = y_m)$$

*On appelle variance de la variable aléatoire  $X$  le réel :*

$$V(X) = \sum_{k=1}^{k=m} (y_k - E(X))^2 P(X = y_k) = (y_1 - E(X))^2 P(X = y_1) + \dots + (y_m - E(X))^2 P(X = y_m)$$

*On appelle écart-type de la variable aléatoire  $X$  le réel  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ .*

**Remarque 2.** *Ces définitions sont cohérentes avec les Statistiques car  $\sum_{k=1}^{k=m} P(X = y_k) = 1$ .*

**Exemple 3.** *Calcul de l'espérance de la variance et de l'écart-type de la somme des numéros lors d'un lancer de deux dés cubiques équilibrés.*

## 2 Loi de Bernoulli - Loi Binomiale

### 2.1 Loi de Bernoulli

**Définition 4.** *On appelle épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$  une expérience aléatoire possédant deux issues appelées "succès" et "échec" de probabilités  $p$  et  $q = 1 - p$ .*

**Exemple 4.** *Lancer d'une pièce truquée :  $\Omega = \{Pile, Face\}$  et  $P(Pile) = p = \frac{2}{3}$ .*

**Définition 5.** *On appelle loi de Bernoulli de paramètre  $p$  la loi de probabilité de la variable aléatoire associée à une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$  dont la valeur est 1 si l'issue est "succès" et 0 si l'issue est "échec".*

**Propriété 1.** *Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , alors :*

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = pq = p(1 - p)$$

*Démonstration.* au programme. □

## 2.2 Loi Binomiale

**Définition 6.** On appelle factorielle d'un entier naturel  $n$  le produit des nombres naturels de 1 jusqu'à  $n$ , on pose  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$  et par convention  $0! = 1$ .

**Exemple 5.** Calcul du nombre de "mots" formés un utilisant une fois et une seule chacune des lettres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ .

**Définition 7.** Étant donné un ensemble  $E$  contenant  $n$  éléments, on note  $\binom{n}{k}$  et on lit "k parmi n" le nombre de sous-ensembles de  $E$  contenant  $k$  éléments. On convient de plus que  $\binom{n}{0} = 1$ .

**Exemple 6.** Calcul du nombre de mains de trois cartes dans un jeu de 32 cartes.

**Propriété 2.** Soient  $n$  et  $k$  deux entiers avec  $0 \leq k \leq n$ , alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

*Démonstration.* au programme. □

**Propriété 3.** Soient  $n$  et  $k$  deux entiers avec  $0 \leq k \leq n$ , alors :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{et} \quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

*Démonstration.* au programme. □

**Théorème 1.** Formule du binôme

Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  et tout nombre entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

*Démonstration.* au programme. □

**Corollaire 1.** Pour tout nombre entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

*Démonstration.* au programme. □

**Définition 8.** On appelle schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p$  l'expérience aléatoire consistant à répéter  $n$  fois une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$ .

**Définition 9.** On appelle loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  la loi de probabilité de la variable aléatoire associée à un schéma de de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p$  dont la valeur est le nombre de succès obtenus.

**Exemple 7.** Calcul de l'espérance du nombre total de Pile obtenus lors de trois lancers successifs d'une pièce truquée :  $\Omega = \{Pile, Face\}$  et  $P(Pile) = p = \frac{2}{3}$ .

**Propriété 4.** Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ , alors :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad ; \quad E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = npq = np(1-p)$$

*Démonstration.* admis. □

**Exemple 8.** Calcul de la probabilité d'obtenir 45 fois Pile lors de 100 lancers successifs d'une pièce truquée :  $\Omega = \{Pile, Face\}$  et  $P(Pile) = p = \frac{2}{3}$ .

### 3 Lois continues

On considère dans cette partie des variables aléatoires prenant une infinité de valeurs, l'univers  $\Omega$  considéré étant lui aussi infini.

#### 3.1 Notion de densité de probabilité

**Définition 10.** Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et  $a$  un réel, on appelle :

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$  la limite lorsqu'elle existe de  $\int_a^M f(x)dx$  pour  $M \rightarrow +\infty$ ,

$\int_{-\infty}^a f(x)dx$  la limite lorsqu'elle existe de  $\int_M^a f(x)dx$  pour  $M \rightarrow -\infty$ ,

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  la somme lorsqu'elles existent des intégrales  $\int_{-\infty}^a f(x)dx$  et  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ .

**Exemple 9.** Calcul de  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  et  $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$  ( $\lambda > 0$ ).

On admet pour la définition suivante que la notion d'intégrale se généralise au cas des fonctions continues sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs.

**Définition 11.** On appelle densité de probabilité une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  qui est positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs et telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ .

**Exemple 10.**  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$   $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  ( $\lambda > 0$ )

**Définition 12.** Soit  $f$  une densité de probabilité, on appelle fonction de répartition associée à la densité de probabilité  $f$  la fonction  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ .

**Exemple 11.** Calcul de la fonction de répartition associée aux densités de probabilité de l'exemple précédent.

#### 3.2 Loi uniforme sur $[0; 1]$

**Définition 13.** On dit que la variable aléatoire  $X$  suit la loi uniforme sur l'intervalle  $[0; 1]$  si pour tous réels  $a$  et  $b$  on a :

$$P(X \text{ à valeurs dans } [a; b]) = \int_a^b f(x)dx \text{ avec } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exemple 12.** Probabilité de tirer un réel au hasard dans l'intervalle  $[0; 1]$ , probabilité de tirer un réel au hasard dans l'intervalle  $[a; b]$ .

#### 3.3 Loi exponentielle

**Définition 14.** On dit que la variable aléatoire  $X$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$  si pour tous réels  $a$  et  $b$  on a :

$$P(X \text{ à valeurs dans } [a; b]) = \int_a^b f(x)dx \text{ avec } f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exemple 13.** Probabilité de durée de vie sans vieillissement.