Devoir maison de Mathématiques n°7

Exercice 1

Pour les questions 1 et 2, on donnera les résultats sous forme de fraction irréductible et sous forme décimale arrondie à 10^{-3} *près.*

Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

1. Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de X.
2. Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie. On considère les évènements suivants :
   C1 : « L'enfant choisit la boîte cubique »,
   C2 : « L'enfant choisit la boîte cylindrique »,
   R : « L'enfant prend une bille rouge »,
   V : « L'enfant prend une bille verte ».
   (a) Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.
   (b) Calculer la probabilité de l'événement R.
   (c) Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?
3. L'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.
   (a) Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.
   (b) Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geqslant 0,99$.

Exercice 2

Les 1 000 premières décimales de π sont données ici par un ordinateur :

1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679

8214808651 3233066470 9384460959 0582235725 3594085234 8111745028 4102701930 5211055596 4462294895 4930301964

4288109756 6593344612 8475648233 7867831652 7120190914 5648566923 4603486534 5432664825 3393607260 2491412737

2450700660 6315580574 8815209209 6282925409 1715364367 8925903600 1133053054 8820466525 3841469519 4151160943

3057270365 7595919530 9218611738 1932611793 1051185480 7446297996 2749567355 8857527240 9122793318 3011949129

8336733624 4065664308 6025394946 3952247371 9070217986 0943702770 5392171762 9317675238 4674818467 6691051320

0056812714 5263560827 7857753427 9778900917 3637178721 4684409012 2495343054 6549585371 0507922796 8925892354

2019956112 1290219608 6403441815 9813629774 7713099605 1870721134 9999998372 9780499510 5973173281 6096318599

0244594553 4690830264 2522300253 3446850352 6193110017 1010003137 8387528865 8753320830 1420617177 6691473035

9825349042 8755460731 1595620633 8235378759 3751957781 8577805321 7122600661 3001927876 6111959092 1642019894

En groupant par valeurs entre 0 et 9 ces décimales, on obtient le tableau suivant :

Valeurs	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Occurrences	93	116	102	102	94	97	94	95	101	106

Avec un tableur, on a simulé 1 000 expériences de 1 000 tirages aléatoires d'un chiffre compris entre 0 et 9.

Pour chaque expérience, on a calculé $d^2 = \sum_{k=0}^{k=9} (f_k - 0,1)^2$ où f_k représente, pour l'expérience, la fréquence observée du chiffre k.
On a alors obtenu une série statistique pour laquelle on a calculé le premier et neuvième décile (D_1 et D_9), le premier et troisième quartile (Q_1 et Q_3) et la médiane (Me) :
$D_1 = 0,000\,422$; $Q_1 = 0,000\,582$; Me $= 0,000\,822$; $Q_3 = 0,001\,136$; $D_9 = 0,001\,45$.

En effectuant le calcul de d^2 sur la série des 1 000 premières décimales de π, on obtient :

☐ $0,000\,456$ ☐ $0,004\,56$ ☐ $0,000\,314$

Un statisticien découvrant le tableau et ignorant qu'il s'agit des décimales de π, fait l'hypothèse que la série est issue de tirages aléatoires indépendants suivant une loi équirépartie. Il prend un risque de 10 % de rejeter cette hypothèse quand elle est vraie. Accepte-t-il cette hypothèse ?

☐ Oui ☐ Non ☐ Il ne peut pas conclure.

Exercice 3

On modélise le temps d'attente entre deux clients à un guichet comme une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ. La probabilité pour un client d'attendre moins de t min est définie par :

$$P(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

Le temps moyen d'attente est donné par :

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

1. (a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^t \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ en fonction de t.

   (b) En déduire que le temps moyen est $\frac{1}{\lambda}$.
2. Le temps moyen d'attente étant de 5 min, quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 min ? plus de 5 min ?
3. Quelle est la probabilité d'attendre encore au moins 5 min, sachant qu'on a déjà attendu 10 min ? Comment expliquez-vous ce résultat ?