Correction du devoir maison de Mathématiques n°7

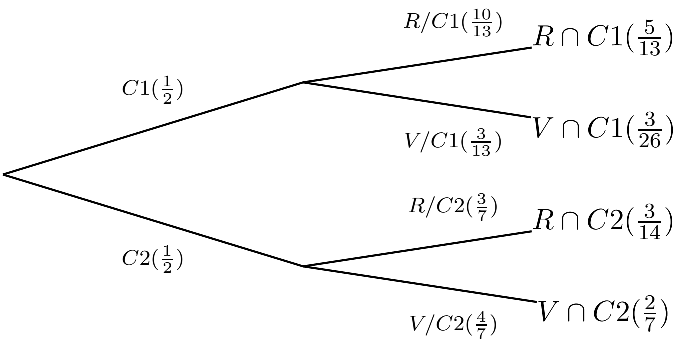
Exercice 1

1. (a)

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= \frac{\binom{10}{0}\binom{3}{3}}{\binom{13}{3}} &= \frac{1}{286} &\simeq 0,003\\
P(X=1) &= \frac{\binom{10}{1}\binom{3}{2}}{\binom{13}{3}} &= \frac{15}{143} &\simeq 0,105\\
P(X=2) &= \frac{\binom{10}{2}\binom{3}{1}}{\binom{13}{3}} &= \frac{135}{286} &\simeq 0,472\\
P(X=3) &= \frac{\binom{10}{3}\binom{3}{0}}{\binom{13}{3}} &= \frac{60}{143} &\simeq 0,420
\end{aligned}
$$

(b) $E(X) = 0 \times \frac{1}{286} + 1 \times \frac{15}{143} + 2 \times \frac{135}{286} + 3 \times \frac{60}{143} = \frac{30}{13} \simeq 2,308.$

2. (a)



(b) $P(R) = P(R \cap C1) + P(R \cap C2) = \frac{5}{13} + \frac{3}{14} = \frac{109}{182} \simeq 0,599.$

(c) $P_R(C1) = \frac{P(R \cap C1)}{P(R)} = \frac{5/13}{109/182} = \frac{70}{109} \simeq 0,642$

3. Le nombre de billes rouges tirées Y obéit à une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{109}{182}$.

(a) $p_n = P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{109}{182}\right)^0\left(\frac{73}{182}\right)^n = 1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n$

(b)

$$\begin{aligned}
p_n \geqslant 0,99 &\Leftrightarrow 1-\left(\frac{73}{182}\right)^n \geqslant 0,99\\
p_n \geqslant 0,99 &\Leftrightarrow \left(\frac{73}{182}\right)^n \leqslant 0,01\\
p_n \geqslant 0,99 &\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{73}{182}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{100}\right)\\
p_n \geqslant 0,99 &\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(100)}{\ln(182)-\ln(73)}\\
p_n \geqslant 0,99 &\Leftrightarrow n \geqslant 6
\end{aligned}$$

Exercice 2

En effectuant le calcul de d^2 sur la série des 1 000 premières décimales de π, on obtient :

$$\begin{aligned}
d^2 &= (0,093-0,1)^2+(0,116-0,1)^2+(0,102-0,1)^2+(0,102-0,1)^2+(0,094-0,1)^2+\\
&\quad (0,097-0,1)^2+(0,094-0,1)^2+(0,095-0,1)^2+(0,101-0,1)^2+(0,106-0,1)^2\\
d^2 &= 0,000456
\end{aligned}$$

comme on constate que d^2 est inférieur à D_9 on ne peut pas conclure car on ne connait pas le risque de se tromper en acceptant l'hypothèse d'équirépartition.

Exercice 3

1. (a) On pose $u(x)=x$ et $v(x)=-\mathrm{e}^{-\lambda x}$ fonctions derivables et à dérivées continues sur $\mathbb{R}$, on peut alors utiliser la formule d'intégration par parties $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$, soit :

$$\int_0^t \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=t} - \int_0^t -\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = -t\mathrm{e}^{-\lambda t} + \left[\frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_{x=0}^{x=t} = \frac{1}{\lambda} - \left(t+\frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

   (b) On en déduit que le temps moyen est $\frac{1}{\lambda}$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t\mathrm{e}^{-\lambda t}=0$ pour $\lambda>0$.

2. Le temps moyen d'attente étant de 5 min, on a $\lambda=\frac{1}{5}$ d'où après intégration $P(X\leqslant t)=1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$.

   La probabilité d'attendre plus de 5 min est $P(X>5)=1-P(X\leqslant 5)=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

   La probabilité d'attendre plus de 10 min est $P(X>10)=1-P(X\leqslant 10)=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$.

3. La probabilité d'attendre encore au moins 5 min, sachant qu'on a déjà attendu 10 min est :

$$\frac{P(X>15)}{P(X>10)} = \frac{1/\mathrm{e}^3}{1/\mathrm{e}^2} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

   on retrouve la probabilité d'attendre plus de 5 mn car le processus est sans mémoire.