

Correction du devoir maison de Mathématiques n°7

Exercice 1

1. (a)

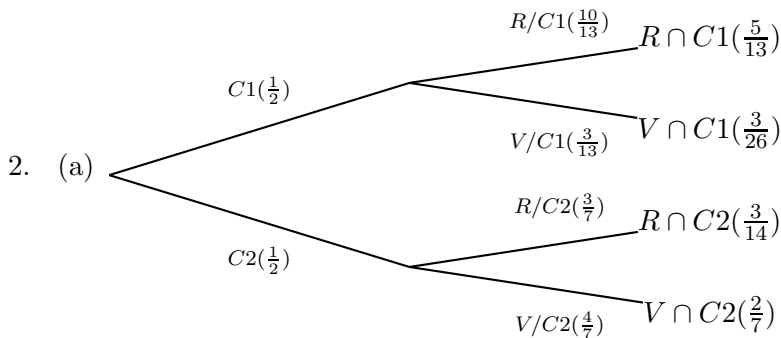
$$P(X = 0) = \frac{\binom{10}{0} \binom{3}{3}}{\binom{13}{3}} = \frac{1}{286} \simeq 0,003$$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{10}{1} \binom{3}{2}}{\binom{13}{3}} = \frac{15}{143} \simeq 0,105$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{10}{2} \binom{3}{1}}{\binom{13}{3}} = \frac{135}{286} \simeq 0,472$$

$$P(X = 3) = \frac{\binom{10}{3} \binom{3}{0}}{\binom{13}{3}} = \frac{60}{143} \simeq 0,420$$

(b) $E(X) = 0 \times \frac{1}{286} + 1 \times \frac{15}{143} + 2 \times \frac{135}{286} + 3 \times \frac{60}{143} = \frac{30}{13} \simeq 2,308.$



(b) $P(R) = P(R \cap C1) + P(R \cap C2) = \frac{5}{13} + \frac{3}{14} = \frac{109}{182} \simeq 0,599.$

(c) $P_R(C1) = \frac{P(R \cap C1)}{P(R)} = \frac{5/13}{109/182} = \frac{70}{109} \simeq 0,642$

3. Le nombre de billes rouges tirées Y obéit à une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{109}{182}$.

(a) $p_n = P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0} \left(\frac{109}{182}\right)^0 \left(\frac{73}{182}\right)^n = 1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n$

(b)

$$\begin{aligned}
p_n \geq 0,99 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n \geq 0,99 \\
p_n \geq 0,99 &\Leftrightarrow \left(\frac{73}{182}\right)^n \leq 0,01 \\
p_n \geq 0,99 &\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{73}{182}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{100}\right) \\
p_n \geq 0,99 &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(100)}{\ln(182) - \ln(73)} \\
p_n \geq 0,99 &\Leftrightarrow n \geq 6
\end{aligned}$$

Exercice 2

En effectuant le calcul de d^2 sur la série des 1 000 premières décimales de π , on obtient :

$$\begin{aligned}
d^2 &= (0,093 - 0,1)^2 + (0,116 - 0,1)^2 + (0,102 - 0,1)^2 + (0,102 - 0,1)^2 + (0,094 - 0,1)^2 + \\
&\quad (0,097 - 0,1)^2 + (0,094 - 0,1)^2 + (0,095 - 0,1)^2 + (0,101 - 0,1)^2 + (0,106 - 0,1)^2 \\
d^2 &= 0,000456
\end{aligned}$$

comme on constate que d^2 est inférieur à D_9 on ne peut pas conclure car on ne connaît pas le risque de se tromper en acceptant l'hypothèse d'équipartition.

Exercice 3

1. (a) On pose $u(x) = x$ et $v(x) = -e^{-\lambda x}$ fonctions dérivables et à dérivées continues sur \mathbb{R} , on peut alors utiliser la formule d'intégration par parties $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u'(x)v(x)dx$, soit :

$$\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx = \left[-x e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=t} - \int_0^t -e^{-\lambda x} dx = -t e^{-\lambda t} + \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_{x=0}^{x=t} = \frac{1}{\lambda} - \left(t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$$

(b) On en déduit que le temps moyen est $\frac{1}{\lambda}$ car $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\lambda t} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-\lambda t} = 0$ pour $\lambda > 0$.

2. Le temps moyen d'attente étant de 5 min, on a $\lambda = \frac{1}{5}$ d'où après intégration $P(X \leq t) = 1 - e^{-\frac{t}{5}}$.

La probabilité d'attendre plus de 5 min est $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = \frac{1}{e}$.

La probabilité d'attendre plus de 10 min est $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = \frac{1}{e^2}$.

3. La probabilité d'attendre encore au moins 5 min, sachant qu'on a déjà attendu 10 min est :

$$\frac{P(X > 15)}{P(X > 10)} = \frac{1/e^3}{1/e^2} = \frac{1}{e}$$

on retrouve la probabilité d'attendre plus de 5 mn car le processus est sans mémoire.