Correction du devoir de mathématiques n°7

Exercice 1

1. **a.** $\dfrac{50}{200} = 0,25$
2. **b.** $40\% = 0,4$
3. **b.** $\dfrac{70\% \times 50}{200} = 0,175$
4. **c.** $\dfrac{40\% \times 150 + 70\% \times 50}{200} = 0,475$
5. **a.** $\dfrac{0,175}{0,475} = \dfrac{7}{19}$
6. **a.** $1 - \left(\dfrac{50}{200}\right)^{20} = 1 - (0,25)^{20}$

Exercice 2

Partie A

La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,01$.

1. $P(X = 2) = \begin{pmatrix} 100 \\ 2 \end{pmatrix} \times 0,01^2 \times (1 - 0,01)^{98} \simeq 0,2$
2. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,99^{100} \simeq 0,63$
3. $E(X) = np = 100 \times 0,01 = 1$

Partie B

1. (a)

$$P(T_1 \geqslant 1000) = 1 - \int_0^{100} \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\, \mathrm{d}x = 1 + \left[\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\right]_{x=0}^{x=1000} = \mathrm{e}^{-\lambda_1 \times 1000} = \mathrm{e}^{-2} \simeq 0,14$$

(b)

$$P(T_2 \geqslant 1000) = \mathrm{e}^{-\lambda_2 \times 1000} = \mathrm{e}^{-0,1} \simeq 0,90$$

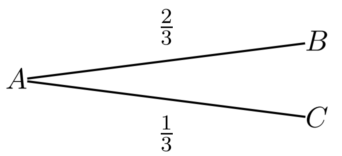
2.

$$P(T \geqslant t) = 0,01 \times P(T_1 \geqslant t) + 0,99 \times P(T_2 \geqslant t) = 0,01\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + 0,99\mathrm{e}^{-\lambda_2 t} = 0,01\mathrm{e}^{-2\times 10^{-3} t} + 0,99\mathrm{e}^{-10^{-4} t}$$

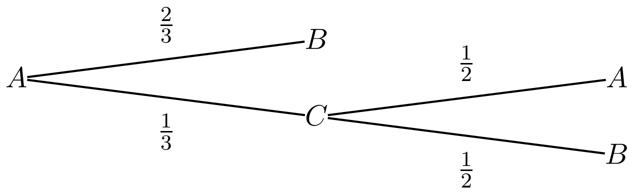
3.

$$\frac{P(T_1 \geqslant 1000)}{P(T \geqslant 1000)} = \frac{\mathrm{e}^{-2}}{0,01\mathrm{e}^{-2} + 0,99\mathrm{e}^{-0,1}} \simeq 0,15$$

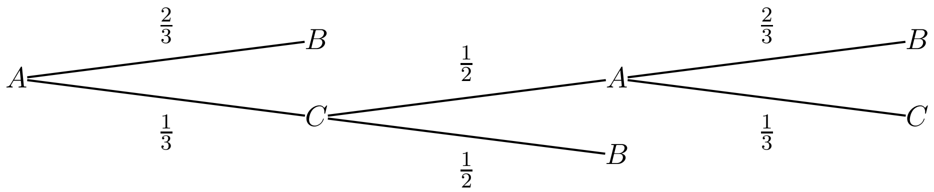
Exercice 3

1. 

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ b_1 &= \tfrac{2}{3} \\ c_1 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a_2 &= \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{6} \\ b_2 &= \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{6} \\ c_2 &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a_3 &= 0 \\ c_3 &= \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{18} \\ b_3 &= 1 - \tfrac{1}{18} = \tfrac{17}{18} \end{aligned}$$

2. (a) La puce est soit en A, en B ou en C donc $a_n + b_n + c_n = 1$, de plus si la puce est en A à l'instant $(n+1)$ elle était forcément en C à l'instant n donc $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}c_n$ et si la puce est en C à l'instant $(n+1)$ elle était forcément en A à l'instant n donc $c_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n$.

   (b) $a_{n+2} = \dfrac{1}{2}c_{n+1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3}a_n = \dfrac{1}{6}a_n$ et de même $c_{n+2} = \dfrac{1}{3}a_{n+1} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2}c_n = \dfrac{1}{6}c_n$.

   (c) – La suite $(a_{2p})_{p\geqslant 0}$ est une suite géométrique de premier terme $a_0 = 1$ et de raison $\dfrac{1}{6}$ donc :

   $$a_{2p} = 1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^p = \left(\frac{1}{6}\right)^p$$

   – La suite $(a_{2p+1})_{p\geqslant 0}$ est une suite géométrique de premier terme $a_1 = 0$ et de raison $\dfrac{1}{6}$ donc :

   $$a_{2p+1} = 0 \times \left(\frac{1}{6}\right)^p = 0$$

   – La suite $(c_{2p})_{p\geqslant 0}$ est une suite géométrique de premier terme $c_0 = 0$ et de raison $\dfrac{1}{6}$ donc :

   $$c_{2p} = 0 \times \left(\frac{1}{6}\right)^p = 0$$

   – La suite $(c_{2p+1})_{p\geqslant 0}$ est une suite géométrique de premier terme $c_1 = \dfrac{1}{3}$ et de raison $\dfrac{1}{6}$ donc :

   $$c_{2p+1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^p$$

3. On a $0 \leqslant a_{2p+1} \leqslant \left(\dfrac{1}{6}\right)^{\frac{2p+1}{2}}$ car $a_{2p+1} = 0$ et $0 \leqslant a_{2p} \leqslant \left(\dfrac{1}{6}\right)^p$ car $a_{2p} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^p$ donc $0 \leqslant a_n \leqslant \left(\dfrac{1}{6}\right)^{\frac{n}{2}}$ et d'après le « théorème des gendarmes » on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
   On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$, alors comme $b_n = 1 - a_n - c_n$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1 - 0 - 0 = 1$.