

Correction du devoir de mathématiques n°7

Exercice 1

1. b. $\frac{150}{200} = 0,75$
2. c. $40\% = 0,4$
3. c. $\frac{40\% \times 150}{200} = 0,3$
4. c. $\frac{40\% \times 150 + 70\% \times 50}{200} = 0,475$
5. b. $\frac{0,3}{0,475} = \frac{12}{19}$
6. a. $1 - \left(\frac{50}{200}\right)^{20} = 1 - (0,25)^{20}$

Exercice 2**Partie A**

La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,02$.

1. $P(X = 2) = \binom{50}{2} \times 0,02^2 \times (1 - 0,02)^{48} \simeq 0,2$
2. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,98^{50} \simeq 0,64$
3. $E(X) = np = 50 \times 0,02 = 1$

Partie B

1. (a)

$$P(T_1 \geq 1000) = 1 - \int_0^{1000} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx = 1 + \left[e^{-\lambda_1 x} \right]_{x=0}^{x=1000} = e^{-\lambda_1 \times 1000} = e^{-0,5} \simeq 0,61$$

- (b)

$$P(T_2 \geq 1000) = e^{-\lambda_2 \times 1000} = e^{-0,1} \simeq 0,90$$

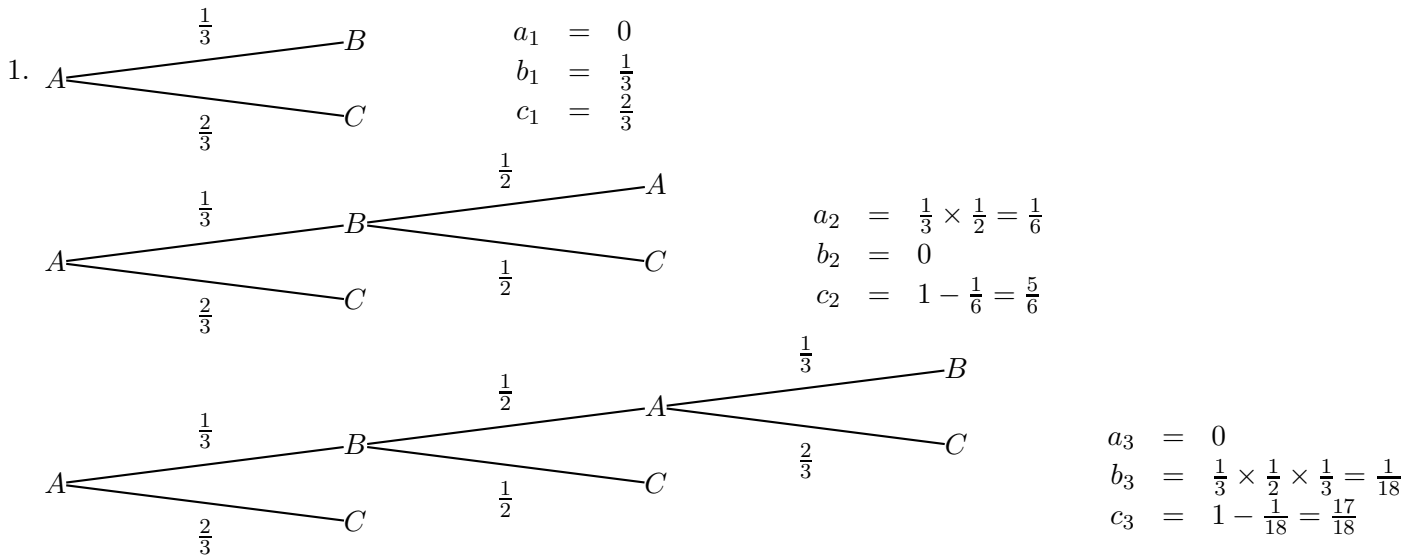
- 2.

$$P(T \geq t) = 0,02 \times P(T_1 \geq t) + 0,98 \times P(T_2 \geq t) = 0,02e^{-\lambda_1 t} + 0,98e^{-\lambda_2 t} = 0,02e^{-5 \times 10^{-4} t} + 0,98e^{-10^{-4} t}$$

- 3.

$$\frac{P(T_1 \geq 1000)}{P(T \geq 1000)} = \frac{e^{-0,5}}{0,02e^{-0,5} + 0,98e^{-0,1}} \simeq 0,67$$

Exercice 3



2. (a) La puce est soit en A , en B ou en C donc $a_n + b_n + c_n = 1$, de plus si la puce est en B à l'instant $(n+1)$ elle était forcément en A à l'instant n donc $b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$ et si la puce est en A à l'instant $(n+1)$ elle était forcément en B à l'instant n donc $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$.
- (b) $a_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}a_n = \frac{1}{6}a_n$ et de même $b_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}b_n = \frac{1}{6}b_n$.
- (c) – La suite $(a_{2p})_{p \geq 0}$ est une suite géométrique de premier terme $a_0 = 1$ et de raison $\frac{1}{6}$ donc :

$$a_{2p} = 1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^p = \left(\frac{1}{6}\right)^p$$

- La suite $(a_{2p+1})_{p \geq 0}$ est une suite géométrique de premier terme $a_1 = 0$ et de raison $\frac{1}{6}$ donc :

$$a_{2p+1} = 0 \times \left(\frac{1}{6}\right)^p = 0$$

- La suite $(b_{2p})_{p \geq 0}$ est une suite géométrique de premier terme $b_0 = 0$ et de raison $\frac{1}{6}$ donc :

$$b_{2p} = 0 \times \left(\frac{1}{6}\right)^p = 0$$

- La suite $(b_{2p+1})_{p \geq 0}$ est une suite géométrique de premier terme $b_1 = \frac{1}{3}$ et de raison $\frac{1}{6}$ donc :

$$b_{2p+1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^p$$

3. On a $0 \leq a_{2p+1} \leq \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2p+1}{2}}$ car $a_{2p+1} = 0$ et $0 \leq a_{2p} \leq \left(\frac{1}{6}\right)^p$ car $a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p$ donc $0 \leq a_n \leq \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{n}{2}}$ et d'après le « théorème des gendarmes » on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$, alors comme $c_n = 1 - a_n - b_n$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 1 - 0 - 0 = 1$.