

Géométrie dans l'Espace

1 Caractérisation barycentrique d'une droite et d'un plan de l'Espace

Propriété 1. Soient A et B deux points distincts de l'Espace, alors :

1. Le point M appartient à la droite (AB) si et seulement si il existe deux réels α et β tels que $\alpha + \beta \neq 0$ et $M = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$.
2. Le point M appartient au segment $[AB]$ si et seulement si il existe deux réels α et β positifs ou nuls tels que $\alpha + \beta \neq 0$ et $M = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$.

Démonstration. au programme. □

Propriété 2. Soient A , B et C trois points non alignés de l'Espace, alors :

1. Le point M appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe trois réels α , β et γ tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $M = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$.
2. Le point M appartient au triangle « plein » ABC si et seulement si il existe trois réels α , β et γ positifs ou nuls tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $M = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$.

Démonstration. au programme. □

2 Représentation paramétrique d'une droite de l'Espace

L'Espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Propriété 3. Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ un point et $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ un vecteur de l'Espace, alors le point $M(x; y; z)$ appartient à la droite passant par A de vecteur directeur \vec{u} si et seulement si il existe un réel k tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + k\alpha \\ y = y_A + k\beta \\ z = z_A + k\gamma \end{cases}$$

Démonstration. au programme. □

3 Produit scalaire

Définition 1. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du Plan ou de l'Espace, on appelle produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} le réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Remarque 1. $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

Définition 2. Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} du Plan ou de l'Espace sont dits orthogonaux si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriété 4. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du Plan ou de l'Espace alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos[(\vec{u}, \vec{v})]$.

Démonstration. au programme. □

Propriété 5. Le Plan et l'Espace sont munis d'un repère orthonormé.

(1) Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du Plan, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

(2) Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'Espace, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Démonstration. au programme. □

Propriété 6. Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs du Plan ou de l'Espace et k un nombre réel, alors :

(1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

(2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

(3) $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Démonstration. au programme. □

Exemple 1. Calcul de $(\vec{u} + \vec{v})^2$.

4 Équation cartésienne d'une droite du Plan et d'un plan de l'Espace

4.1 Équation cartésienne d'une droite du Plan.

Le Plan est muni d'un repère orthonormé.

Propriété 7. Toute droite \mathcal{D} du Plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec a et b non nuls simultanément, cette équation est appelée une équation cartésienne de la droite \mathcal{D} , le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est appelé un vecteur normal à la droite \mathcal{D} .

Démonstration. au programme en posant \vec{n} un vecteur directeur d'une droite perpendiculaire à \mathcal{D} en un point H puis en calculant $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n}$. □

Remarque 2. Il n'y a pas unicité de l'équation cartésienne.

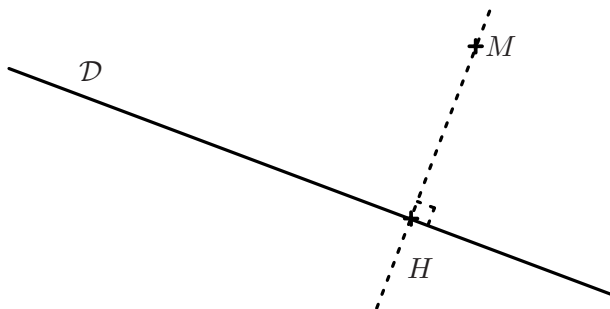
Propriété 8. Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites du Plan d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$, alors :

(1) Les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

(2) Les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' = 0$.

Démonstration. au programme. □

Définition 3. Soient \mathcal{D} une droite et M un point du Plan, on appelle projeté orthogonal du point M sur la droite \mathcal{D} le point H intersection de la droite \mathcal{D} avec la droite perpendiculaire à \mathcal{D} passant par M . On appelle distance du point M à la droite \mathcal{D} le réel $d(M; \mathcal{D}) = HM$.



Propriété 9. Soient $M(x_M; y_M)$ un point du Plan et \mathcal{D} une droite du Plan d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, alors :

$$d(M; \mathcal{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Démonstration. au programme en calculant $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n}$. □

Propriété 10. Une droite \mathcal{D} du Plan d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ partage le Plan en deux demi-plans de frontière \mathcal{D} d'équations $ax + by + c > 0$ et $ax + by + c < 0$.

Démonstration. au programme en calculant $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n}$. □

4.2 Équation cartésienne d'un plan de l'Espace.

L'Espace est muni d'un repère orthonormé.

Propriété 11. Toute plan \mathcal{P} de l'Espace admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec a , b et c non nuls simultanément, cette équation est appelée une équation cartésienne du plan \mathcal{P} , le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est appelé un vecteur normal au plan \mathcal{P} .

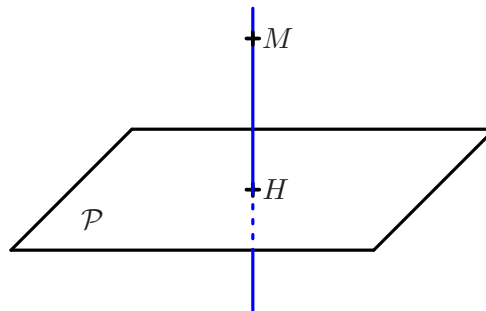
Démonstration. au programme en posant \vec{n} un vecteur directeur d'une droite perpendiculaire à \mathcal{P} en un point H puis en calculant $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n}$. □

Remarque 3. Il n'y a pas unicité de l'équation cartésienne.

Propriété 12. Deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' de l'Espace d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' + cc' = 0$.

Démonstration. au programme. □

Définition 4. Soient \mathcal{P} un plan et M un point de l'Espace, on appelle projeté orthogonal du point M sur le plan \mathcal{P} le point H intersection du plan \mathcal{P} avec la droite perpendiculaire à \mathcal{P} passant par M . On appelle distance du point M au plan \mathcal{P} le réel $d(M; \mathcal{P}) = HM$.



Propriété 13. Soient $M(x_M; y_M; z_M)$ un point de l'Espace et \mathcal{P} un plan de l'Espace d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, alors :

$$d(M; \mathcal{P}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Démonstration. au programme en calculant $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n}$. □

Propriété 14. Un plan \mathcal{P} de l'Espace d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ partage l'Espace en deux demi-espaces de frontière \mathcal{P} d'équations $ax + by + cz + d > 0$ et $ax + by + cz + d < 0$.

Démonstration. au programme en calculant $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n}$. □