Correction du devoir de mathématiques n°8

Exercice 1

1. $R = \mathrm{d}(\Omega, \mathcal{P}) = \dfrac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \dfrac{|1\times(-1) + 1\times 1 + (-1)\times(-3) + (-9)|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.
2. Soit $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $M(x;y;z) \in \Delta$ on a $\overrightarrow{\Omega M} = k\overrightarrow{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x-(-1) &= k\times 1 \\ y-1 &= k\times 1) \\ z-(-3) &= k\times(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -1+k \\ y &= 1+k \\ z &= -3-k \end{cases}$.
3. On appelle $M(x;y;z)$ le point d'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}$, on a $M = \Delta \cap \mathcal{P}$ d'où $(-1+k)+(1+k)-(-3-k)-9=0$ et donc $k=2$ et $x=1$, $y=3$ et $z=-5$.

Exercice 2

Partie A

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3\times 3 + 3\times(-3) + 3\times 0 = 0$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{n}$ donc $\mathcal{P}$ est orthogonal à la droite (AB), de plus $x_A + y_A + z_A + 3 = 1 + 0 + (-4) + 3 = 0$ donc $\mathcal{P}$ passe par le point A.
3. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}'$ qui admet donc une équation cartésienne du type $x - y + d = 0$, de plus il passe par le point A donc $x_A - y_A + d = 0$ soit $1 - 0 + d = 0$ et $d = -1$. $\mathcal{P}'$ admet donc pour équation cartésienne l'équation $x - y - 1 = 0$.
4. $\begin{cases} x+y+z+3 &= 0 \\ x-y-1 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= k \\ k+y+z+3 &= 0 \\ k-y-1 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= k \\ y &= -1+k \\ z &= -2-2k \end{cases}$.

Partie B

1. $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -3\times 3 + (-3)\times 3 + 6\times 3 = 0$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = -3\times 3 + (-3)\times(-3) + 6\times 0 = 0$.
2. $\text{Volume}(ABCD) = \dfrac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{AB \times AC}{2} \times AD = \dfrac{1}{6} \times AB \times AC \times AD$.
   $\text{Volume}(ABCD) = \dfrac{1}{6} \times 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{6} = 27$.
3. $\cos(\widehat{BDC}) = \dfrac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}}{DB \times DC} = \dfrac{54}{9 \times 6\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
4. (a) $\text{Aire}(BDC) = \dfrac{1}{2} \times DB \times DC \times \sin(\widehat{BDC}) = \dfrac{1}{2} \times 9 \times 6\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 27$.

   (b) $\mathrm{d}(A, (BDC)) = \dfrac{3 \times \text{Volume}(ABCD)}{\text{Aire}(BCD)} = \dfrac{3 \times 27}{27} = 3$.