

Correction du devoir de mathématiques n°8

Exercice 1

- $R = d(\Omega, \mathcal{P}) = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1 \times (-1) + 1 \times 1 + (-1) \times (-3) + (-9)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$
- Soit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $M(x; y; z) \in \Delta$ on a $\overrightarrow{\Omega M} = k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x - (-1) = k \times 1 \\ y - 1 = k \times 1 \\ z - (-3) = k \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + k \\ y = 1 + k \\ z = -3 - k \end{cases}.$
- On appelle $M(x; y; z)$ le point d'intersection de la sphère \mathcal{S} et du plan \mathcal{P} , on a $M = \Delta \cap \mathcal{P}$ d'où $(-1 + k) + (1 + k) - (-3 - k) - 9 = 0$ et donc $k = 2$ et $x = 1, y = 3$ et $z = -5.$

Exercice 2**Partie A**

- $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 3 + 3 \times (-3) + 3 \times 0 = 0.$
- Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan \mathcal{P} et $\overrightarrow{AB} = 3\vec{n}$ donc \mathcal{P} est orthogonal à la droite (AB) , de plus $x_A + y_A + z_A + 3 = 1 + 0 + (-4) + 3 = 0$ donc \mathcal{P} passe par le point $A.$
- Le vecteur \overrightarrow{AC} est un vecteur normal à \mathcal{P}' qui admet donc une équation cartésienne du type $x - y + d = 0$, de plus il passe par le point A donc $x_A - y_A + d = 0$ soit $1 - 0 + d = 0$ et $d = -1.$ \mathcal{P}' admet donc pour équation cartésienne l'équation $x - y - 1 = 0.$
- $\begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ k + y + z + 3 = 0 \\ k - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = -1 + k \\ z = -2 - 2k \end{cases}.$

Partie B

- $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -3 \times 3 + (-3) \times 3 + 6 \times 3 = 0$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \times 3 + (-3) \times (-3) + 6 \times 0 = 0.$
- $\text{Volume}(ABCD) = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur} = \frac{1}{3} \times \frac{AB \times AC}{2} \times AD = \frac{1}{6} \times AB \times AC \times AD.$
 $\text{Volume}(ABCD) = \frac{1}{6} \times 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{6} = 27.$
- $\cos(\widehat{BDC}) = \frac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}}{DB \times DC} = \frac{54}{9 \times 6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- (a) $\text{Aire}(BDC) = \frac{1}{2} \times DB \times DC \times \sin(\widehat{BDC}) = \frac{1}{2} \times 9 \times 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 27.$
(b) $d(A, (BDC)) = \frac{3 \times \text{Volume}(ABCD)}{\text{Aire}(BCD)} = \frac{3 \times 27}{27} = 3.$