

Correction du devoir de mathématiques n°8

Exercice 1

$$1. R = d(\Omega, \mathcal{P}) = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1 \times 1 + (-1) \times (-1) + 1 \times 3 + (-11)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

$$2. \text{ Soit } \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } M(x; y; z) \in \Delta \text{ on a } \overrightarrow{\Omega M} = k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = k \times 1 \\ y - (-1) = k \times (-1) \\ z - 3 = k \times 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + k \\ y = -1 - k \\ z = 3 + k \end{cases}.$$

3. On appelle $M(x; y; z)$ le point d'intersection de la sphère \mathcal{S} et du plan \mathcal{P} , on a $M = \Delta \cap \mathcal{P}$ d'où $(1+k) - (-1-k) + (3+k) - 11 = 0$ et donc $k = 2$ et $x = 3$, $y = -3$ et $z = 5$.

Exercice 2**Partie A**

$$1. \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 3 + 3 \times 0 + 3 \times (-3) = 0.$$

2. Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan \mathcal{P} et $\overrightarrow{AB} = 3\vec{n}$ donc \mathcal{P} est orthogonal à la droite (AB) , de plus $x_A + y_A + z_A - 3 = 3 + (-2) + 2 - 3 = 0$ donc \mathcal{P} passe par le point A .

3. Le vecteur \overrightarrow{AC} est un vecteur normal à \mathcal{P}' qui admet donc une équation cartésienne du type $x - z + d = 0$, de plus il passe par le point A donc $x_A - z_A + d = 0$ soit $3 - 2 + d = 0$ et $d = -1$. \mathcal{P}' admet donc pour équation cartésienne l'équation $x - z - 1 = 0$.

$$4. \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ k + y + z - 3 = 0 \\ k - z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = 4 - 2k \\ z = -1 + k \end{cases}.$$

Partie B

$$1. \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -3 \times 3 + 6 \times 3 + (-3) \times 3 = 0 \text{ et } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \times 3 + 3 \times 0 + (-3) \times (-3) = 0.$$

$$2. \text{ Volume}(ABCD) = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur} = \frac{1}{3} \times \frac{AB \times AC}{2} \times AD = \frac{1}{6} \times AB \times AC \times AD.$$

$$\text{Volume}(ABCD) = \frac{1}{6} \times 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{6} = 27.$$

$$3. \cos(\widehat{BDC}) = \frac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}}{DB \times DC} = \frac{54}{9 \times 6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$4. \text{ (a) Aire}(BDC) = \frac{1}{2} \times DB \times DC \times \sin(\widehat{BDC}) = \frac{1}{2} \times 9 \times 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 27.$$

$$\text{ (b) } d(A, (BDC)) = \frac{3 \times \text{Volume}(ABCD)}{\text{Aire}(BCD)} = \frac{3 \times 27}{27} = 3.$$