Présentation du logiciel de calcul formel Xcas

Le but de l'activité est de tester quelques fonctions de Xcas sur un problème, des exemples d'utilisation sont donnés à la fin de chaque question. La syntaxe générale des fonctions utilisées peut être obtenue au moyen de l'aide en ligne, en faisant précéder le nom de la fonction par un point d'interrogation.

Problème

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x+2}$.

```
f:=x->x*exp(-x+2)
```

1. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et déterminer les éventuelles asymptotes de la courbe représentative.

   ```
   diff(f(x),x)
   limit(f(x),x,+infinity)
   ```

2. (a) Tracer sur la calculatrice graphique les courbes de la fonction f et de la fonction logarithme népérien, on notera $\mathcal{L}$ cette dernière.
   Conjecturer avec ce graphique le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \ln(x)$ sur $[1;+\infty[$.

   ```
   plot([f(x),ln(x)],x=0..10)
   ```

   (b) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \ln(x) - f(x)$ est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.
   En déduire que l'équation $f(x) = \ln(x)$ admet une unique solution α sur $[1;+\infty[$.

   ```
   g:=x->ln(x)-f(x)
   diff(g(x),x)
   limit(g(x),x,0)
   limit(g(x),x,+infinity)
   ```

   (c) Déterminer à 10^{-3} près une valeur approchée de α.

   ```
   fsolve(g(x),x,3,newton_solver)
   ```

Partie B

1. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$$

```
h:=x->1/(x*(x^2-1))
```

   (a) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$:

$$h(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$

```
convert(h(x),partfrac)
```

   (b) Trouver une primitive H de h sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

```
assume(x>1)
int(h(x),x)
```

   Soit k la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par :

$$k(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

   Trouver une primitive K de k sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

```
k:=x->2*x/(x^2-1)^2
simplify(int(k(x),x))
```

2. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer :

$$I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} \ln x \, \mathrm{d}x$$

   On donnera le résultat exact sous la forme $p \ln 2 + q \ln 3$, avec p et q rationnels.

```
tsimplify(int(k(x)*ln(x),x,2,3))
```