Baccalauréat Blanc de Mathématiques
Série scientifique (S)
Lycée Robert Garnier - février 2008

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient 7 (enseignement obligatoire)
Coefficient 9 (enseignement de spécialité)

L'usage des calculatrices est autorisé.

Le sujet comporte quatre exercices indépendants les uns des autres. Les trois premiers exercices sont communs à tous les candidats, l'exercice 4 diffère selon l'enseignement choisi (obligatoire ou de spécialité). Les exercices 1 et 2 comportent une représentation graphique sur feuilles annexes qui devront être rendues avec la copie.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 **(8 points)**

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x\mathrm{e}^{2x+1}$$

   (a) Quel est, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$?

   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f.

   (c) Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   (d) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

2. On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f et Γ la courbe représentative de la fonction $g(x) = \mathrm{e}^x$ dans un repère orthonormal.

   (a) Montrer que $\mathcal{C}$ et Γ admettent la même tangente T au point d'abscisse (-1).

   (b) Tracer sur le graphique de la feuille annexe n°1 les courbes T, $\mathcal{C}$ et Γ.

3. On appelle h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = 1 + x\mathrm{e}^{x+1}$$

   (a) Étudier le sens de variations de la fonction h et démontrer que $h(x) \geqslant 0$ pour tout x.

   (b) En déduire la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Γ.

4. m désigne un réel quelconque et M le point de la courbe Γ d'abscisse m.

   (a) Écrire une équation de la tangente $\mathcal{D}$ à Γ en M.

   (b) La tangente $\mathcal{D}$ coupe les axes de coordonnées en A et B. Calculer en fonction de m les coordonnées du milieu J du segment $[AB]$.

   (c) Prouver que J appartient à $\mathcal{C}$.

   (d) Tracer $\mathcal{D}$ et J pour $m = 0$.

Exercice 2 **(5 points)**

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & -5 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{-4}{u_n + 4} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. (a) Calculer u_1, u_2 et u_3 (donner les résultats sous forme d'entiers ou de fractions).

   (b) Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier n non nul, $u_n > -2$.

   (c) En déduire que u_n existe pour tout entier naturel n.

2. On considère la fonction f définie sur $[-8;-4[\cup]-4;8]$ par $f(x) = \dfrac{-4}{x+4}$. On donne sur la feuille annexe n°2, dans un repère orthonormal, la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = x$.

   En utilisant $\mathcal{C}$ et Δ, représenter sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite (u_n), puis conjecturer le comportement de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On se propose dans cette question de valider cette conjecture. Pour cela, on considère la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n + 2}$ pour tout entier naturel n.

   (a) Justifier que v_n existe pour tout entier naturel n.

   (b) Démontrer que $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 4}{2u_n + 4}$, puis que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

   (c) En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n en fonction de n. Démontrer alors la conjecture.

Exercice 3 (3 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$(1) \quad : \quad \frac{z-2}{z-1} = z.$$
On donnera le module et un argument de chaque solution.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$(2) \quad : \quad \frac{z-2}{z-1} = \mathrm{i}.$$
On donnera la solution sous forme algébrique.
3. Soit M, A et B les points d'affixes respectives z, 1 et 2. On suppose que M est distinct des points A et B.
   (a) Interpréter géométriquement le module et un argument de $\frac{z-2}{z-1}$.
   (b) Retrouver géométriquement la solution de l'équation (2).
4. (a) Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution de l'équation dans $\mathbb{C}$
$$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = \mathrm{i},$$
où n désigne un entier naturel non nul donné, a pour partie réelle $\frac{3}{2}$.
   (b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$(3) \quad : \quad \left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = \mathrm{i}.$$
On cherchera les solutions sous forme algébrique.

Exercice 4 (Enseignement obligatoire) (4 points)

Un circuit électrique est constitué d'un condensateur de capacité $\mathrm{C} = 75 \times 10^{-6}$ farads, d'une résistance $\mathrm{R} = 2 \times 10^4$ ohms, d'un générateur G et d'un interrupteur. On ferme à l'instant $t = 0$ et le générateur délivre alors une tension V. La tension U aux bornes du condensateur est alors solution sur $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle :
$$(1) \quad : \quad U(t) + \mathrm{RC}U'(t) = V(t).$$
On suppose que $V(t) = 6\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}t}$ où t est exprimé en secondes.

1. (a) Montrer que la fonction U_1 définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $U_1(t) = 4t\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}t}$ est solution particulière de l'équation différentielle (1).
   (b) Montrer que U est solution de (1) si et seulement si $U - U_1$ est solution de l'équation différentielle
$$(2) \quad : \quad U(t) + \frac{3}{2}U'(t) = 0.$$
   (c) Résoudre (2) puis en déduire les solutions de (1).
   (d) Grâce à la condition initiale $U(0) = \frac{1}{2}V(0)$, trouver la tension dans ce circuit en fonction du temps.
2. On considère la fonction U définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $U(t) = (4t+3)\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}t}$.
   (a) Étudier le sens de variation de U et calculer la limite de U en $+\infty$.
   (b) Démontrer que l'équation $U(t) = 10^{-3}$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0\,;\,20]$. Donner un encadrement de α d'amplitude 1 seconde.
   (c) L'appareil mesurant $U(t)$ ne détecte pas les tensions inférieures à 10^{-3} volts. Pour quelles valeurs de t ne détecte-t-il plus la tension $U(t)$?

Exercice 4 (Enseignement de spécialité) (4 points)

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $3n^3 - 11n + 48$ est divisible par $n + 3$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul.
2. Montrer que pour tous les entiers naturels non nuls a, b et c, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}(a\ ;\ b) = \text{PGCD}(bc - a\ ;\ b).$$

3. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante est vraie :

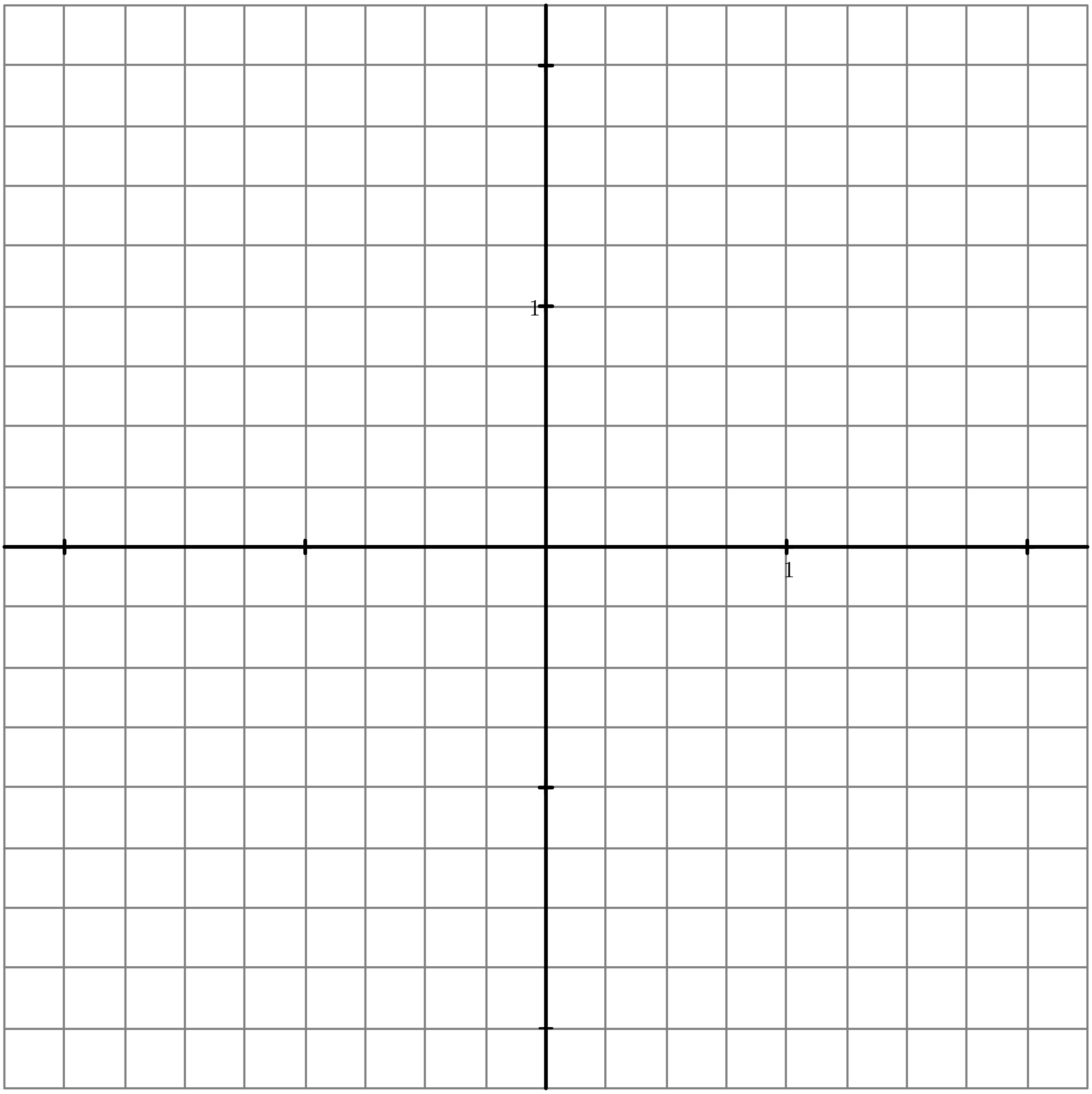
$$\text{PGCD}\left(3n^3 - 11n\ ;\ n + 3\right) = \text{PGCD}(48\ ;\ n + 3).$$

4. (a) Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.
   (b) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\dfrac{3n^3 - 11n}{n + 3}$ soit un entier naturel.

Feuille annexe n°1 (Exercice 1)

NOM :

PRÉNOM :



Feuille annexe n°2 (Exercice 2)

NOM :

PRÉNOM :